I. megoldás. Először tisztázzunk elfajuló, illetve lehetetlen eseteket. A D vagy E pontok akkor eshetnek egybe valamelyik csúccsal, ha a háromszög derékszögű. Ha a derékszög B-nél van, akkor $D \equiv E \equiv B$, nem jöhetett létre a DE-egyenes. Ha A-nál vagy C-nél van (mivel a két eset lényegében ugyanaz, elég pl. csak az A csúcsra vizsgálni), akkor $A \equiv E \equiv M$, így $P \equiv M$, vagyis most a PM-egyenes nem jöhetett létre. Ezeken az eseteken kívül M nem eshet egybe se talpponttal, se csúccsal, se P-vel. Lehetséges még, hogy $AC||DE$, ilyenkor $AEDC$ húrtrapéz, így $BAC\sphericalangle = BCA\sphericalangle$ miatt ABC egyenlő szárú. Tehát fel kell tenni még, hogy $BC \neq AB$.

Legyen az AC szakasz felezőpontja G. Bizonyítandó, hogy $BG \perp PM$. Mivel $CDA\sphericalangle = CEA\sphericalangle = 90°$, azért D és E az AC szakasz Thálesz-körére illeszkedik. Ezt a kört jelölje k.

Másrészt $MDB\sphericalangle = BEM\sphericalangle = 90°$, ezért D és E a BM szakasz Thálesz-körére is illeszkedik. Legyen ez a kör ℓ, a középpontja pedig BM felezőpontja, H.

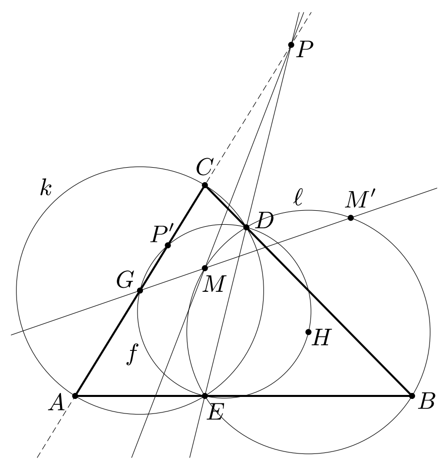
Most azt bizonyítjuk, hogy a GD szakasz (és hasonló módon a GE szakasz) az ℓ körhöz húzott érintőszakasz. G, D és H az ABC háromszög Feuerbach-körére[1] illeszkednek (melyet az *1. ábrán* f-fel jelölünk), a körülírt kör K középpontját viszonyítási pontnak választva pedig

$$\frac{\overrightarrow{G}+\overrightarrow{H}}{2} = \frac{\frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{C}}{2} + \frac{(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C})+\overrightarrow{B}}{2}}{2} = \\ = \frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}}{2},$$

ami a Feuerbach-kör középpontjának helyvektora (felhasználtuk a

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$$

összefüggést is). Így GH átmérő, a Thálesz-tétel miatt $GDH\sphericalangle = 90°$, GD csakugyan érintőszakasz.



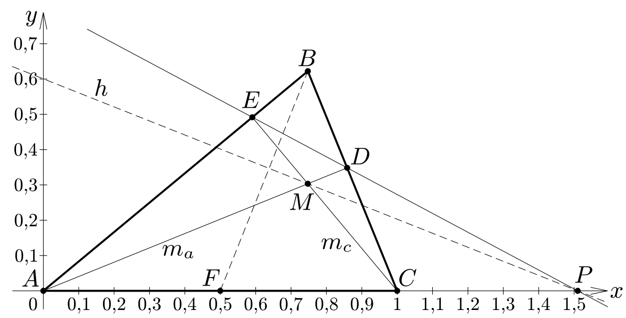
1. ábra

Most invertáljunk k-ra. A GD szakasz a k kör sugara, ezért – a szelőszorzat-tételt is figyelembe véve – ℓ-nek a k-ra invertált képe önmaga. Keressük P képét. Az inverzió illeszkedéstartó, így P egyrészt a DE egyenes képére illeszkedik. A D és az E fixpontok, az egyenes pedig nem megy át G-n, így DE képe egy G-n átmenő kör: DEG körülírt köre, ami ismét ABC Feuerbach-köre. Másrészt P illeszkedik AC képére, ami fixegyenes. Így P' az AC oldalegyenes és a Feuerbach-kör metszéspontja. Két ilyen pont van: az egyik G, de az k középpontja, így nem lehet P képe. A másik a B-hez tartozó magasság talppontja, így ez a magasságtalppont lesz P képe. (Megjegyzés: ha a magasságtalppont és G egybeesnek, akkor ABC egyenlő szárú lett volna, amit kizártunk.) Így $GPB\sphericalangle = 90°$. (Ha D, E és G egy egyenesen lennének, akkor DE is k átmérője lenne, így a Thálesz-tétel szerint $ECD\sphericalangle = DAE\sphericalangle = 90°$ is igaz lenne, vagyis az ABC háromszög AE és CD oldalegyenesei párhuzamosak lennének, ami lehetetlen.)

Most határozzuk meg M'-t is. Ez rajta van az ℓ fixkörön, így GM és ℓ második metszéspontja. Mivel az ℓ kör BM Thálesz-köre, így $GM'B\sphericalangle = MM'B\sphericalangle = 90°$ (ha M és M' fordított sorrendben helyezkednek el, akkor is igaz az állítás, mert kiegészítő szögek lesznek). Most már meghatározhatjuk PM képét. G-n nem mehet át, mert akkor az M pont $PG \equiv AC$-n lenne, ami a derékszögű háromszög lehetetlen esetéhez vezet vissza. Így PM képe a G-n, P'-n és M'-n átmenő kör. Mivel $GM'B\sphericalangle = GP'B\sphericalangle = 90°$, azért ez BG Thálesz-köre. Eközben BG egy G-n átmenő egyenes, így képe önmaga. Tehát PM képének centrálisa a BG egyenes, BG képe. Ez kör és egyenes között derékszöget jelent, így mivel az inverzió szögtartó, az eredeti PM egyenes és BG is merőlegesek voltak. Ezt kellett bizonyítani.

II. megoldás. Legyenek az A, B illetve C pont koordinátái rendre $(0;0)$, $(a;b)$, $(1;0)$, ahol $b \neq 0$, így állhat majd a számolás során törtek nevezőjében.

[1] https://hu.wikipedia.org/wiki/Feuerbach-kör.



2. ábra

A továbbiakban két főbb dolgot fogunk használni:

– Adott $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \left(y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x_1\right).$$

– Két, a tengelyekkel nem párhuzamos egyenes akkor merőleges egymásra, ha meredekségeik szorzata -1.

Az AB egyenes egyenlete: $y = \frac{b}{a}x$.

A BC egyenes egyenlete: $y = -\frac{b}{1-a}x + \frac{b}{1-a}$.

A CE egyenes egyenlete: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{a}{b}$ (az állandót onnan tudjuk, hogy az egyenes átmegy a C ponton).

Az AD egyenlete: $y = \frac{1-a}{b}x$.

Ha $a = 0$ vagy $a = 1$, akkor az ABC háromszög A-ban vagy C-ben derékszögű, D és E egyike az x tengelyen van, egybeesik M-mel és a derékszögű csúccsal, így P is egybeesik M-mel, tehát P és M nem határoz meg egyenest. Ezeket az értékeket tehát kizárhatjuk.

Tudjuk, hogy D rajta van a BC és m_a egyeneseken, tehát felírható a következő egyenlet (a D pont első koordinátája a következő egyenletben x):

$$-\frac{b}{1-a}\cdot x + \frac{b}{1-a} - \frac{1-a}{b}\cdot x = 0,$$

$$x = \frac{b^2}{(1-a)^2 + b^2}.$$

(A számlálóban két nem 0 értékű szám négyzetének összege áll, tehát biztosan nem 0.) A D pont második koordinátája:

$$\frac{1-a}{b}\cdot\frac{b^2}{(1-a)^2 + b^2} = \frac{b(1-a)}{(1-a)^2 + b^2}.$$

Tudjuk, hogy E rajta van az AB és m_c egyeneseken, tehát felírható a következő egyenlet (az E pont első koordinátája a következő egyenletben x):

$$\frac{b}{a}x - \left(-\frac{a}{b}x + \frac{a}{b}\right) = 0,$$

$$x = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

Itt $b \neq 0$, ezért a számláló sem 0. Az E pont második koordinátája:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

A DE egyenes meredeksége:

$$\frac{\frac{b(1-a)}{(1-a)^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}}{\frac{b^2}{(1-a)^2+b^2} - \frac{a^2}{a^2+b^2}}.$$

A nevezőben a D és az E pont első koordinátájának különbsége áll. Ha ez 0, akkor a két pont egybeesik egymással és a B csúccsal, vagyis az ABC háromszög B-ben derékszögű. Ekkor a feladat nem értelmezhető, így feltesszük, hogy ez nem igaz. A kifejezést egyszerűsítve a következőt kapjuk: $\frac{(1-2a)b}{-a^2 + a + b^2}$. (Lépések: $(a^2 + b^2)$-tel, illetve $\left((1-a)^2 + b^2\right)$-tel való bővítés, szorzattá alakítás, $b^2 + a^2 - 1$ szorzótényezővel való egyszerűsítés. Ha ez utóbbinak 0 lenne az értéke, akkor a nevező is 0 lenne, viszont nem 0 értékről indultunk, és csak szoroztunk nem 0 értékű kifejezésekkel, tehát nem lehet 0 a nevező. A végeredmény így egy értelmezhető tört.) Mivel $1-2a=0$ esetén $AB=BC$, és ekkor nem jönne létre a P metszéspont, ezért feltehetjük, hogy $1-2a\neq 0$.

Mivel az egyenes átmegy az E ponton, a képletében szereplő konstans értéke:

$$\frac{ab}{a^2+b^2}-\frac{(1-2a)b}{-a^2+a+b^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2},$$

aminek egyszerűbb alakja $\frac{ab}{-a^2+a+b^2}$. (Lépések: $0\neq\big(-a^2+a+b^2\big)$-tel való bővítés, összevonás, szorzattá alakítás, $0\neq\big(a^2+b^2\big)$-tel való egyszerűsítés. Így a végeredmény egy értelmezhető tört.)

A DE egyenes egyenlete tehát:

$$y=\frac{(1-2a)b}{-a^2+a+b^2}x+\frac{ab}{-a^2+a+b^2}.$$

A P pontról tudjuk, hogy rajta van az AC egyenesen, vagyis második koordinátája 0, és rajta van a DE egyenesen, tehát felírható a következő egyenlet a P pont első koordinátájára: $\frac{(1-2a)bx+ab}{-a^2+a+b^2}=0$. Ez akkor igaz, ha $(1-2a)bx+ab=0$, vagyis $x=\frac{-a}{1-2a}$.

Az M pont első koordinátája a, ugyanis a BM egyenes merőleges az x tengelyre. Mivel M rajta van az m_a egyenesen, második koordinátája $\frac{1-a}{b}a=\frac{a-a^2}{b}$.

A PM egyenes meredeksége:

$$\frac{\frac{a-a^2}{b}-0}{a-\frac{-a}{1-2a}}=\frac{\frac{a-a^2}{b}}{\frac{2a-2a^2}{1-2a}}=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{2}{1-2a}}=-\frac{1-2a}{2b}.$$

F koordinátái $(0;0,5)$, ugyanis AC felezőpontja. Tehát a BF egyenes egyenlete: $\frac{b-0}{a-0,5}=\frac{2b}{2a-1}$. Mivel $-\frac{1}{\frac{2b}{2a-1}}=-\frac{1-2a}{2b}$, azért BF merőleges PM-re.

Megjegyzések. 1. A fő hiba a megoldásokban a diszkusszió hiánya volt. Ez a koordinátageometriai megoldásokban nem csupán geometriai, de algebrai hiányt is jelent, jellemzően 0-val való osztást.

2. Többen a számos fellépő húrnégyszöget használták ki, támaszkodva a kerületi szögek tételére, illetve bizonyos esetekben a hatványvonal tulajdonságaira; mivel sok kört lehetett észrevenni, több különböző úton is el lehetett jutni a megoldáshoz. Egy ilyen megoldás olvasható honlapunkon:
https://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4791&l=hu.