

**Megoldás.** Megmutatjuk, hogy a válasz igenlő. Legyen  $l_{ji} = l_{ij}$  minden  $1 \leq i < j \leq n$  párra.

Határozzuk meg egyenként a továbbiakban potenciálnak nevezett  $a_1, a_2, \dots, a_n$  mennyiségeket (nem feltétlenül ebben a sorrendben) a következő szabály szerint. Minden lépésben válasszunk egy olyan  $i$  indexet, amelyre az  $a_i$  potenciált korábban még nem határoztuk meg, és amelyre azon  $l_{ki}$  értékek  $s$  összege, amelyekre  $a_k$ -t már korábban meghatároztuk, a lehető legkisebb. Az így megválasztott  $i$  indexre legyen az  $a_i$  potenciál ez a minimális  $s$  összeg.

Tegyük fel, hogy az  $a_i$  potenciált az  $a_j$  potenciál előtt határoztuk meg, továbbá, hogy  $K$  az  $a_i$  előtt,  $M$  pedig az  $a_i$  után, de  $a_j$  előtt meghatározott  $a_t$  potenciálokhoz tartozó  $t$  indexek halmaza. Az eljárásból következtében ekkor

$$\begin{aligned} a_j &= \sum_{k \in K} l_{kj} + l_{ij} + \sum_{m \in M} l_{mj} \geq \sum_{k \in K} l_{ki} + l_{ij} + \sum_{m \in M} l_{mj} = \\ &= a_i + l_{ij} + \sum_{m \in M} l_{mj} \geq a_i + l_{ij}, \end{aligned}$$

tehát  $|a_i - a_j| \geq l_{ij}$  valóban teljesül minden  $i \neq j$  párra.

Az indoklás befejezéséhez pedig mindössze annyit kell megfigyelnünk, hogy

$$S := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

éppen az  $l_{ij}$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) értékek összege, hiszen minden egyes  $l_{ij}$  pontosan egyszer szerepel  $S$ -ben, mégpedig az  $a_i$ -t és  $a_j$ -t definiáló összegek közül abban, amelyik a később meghatározott potenciálhoz tartozik.  $\square$

*Megjegyzés.* A feladat és a megoldása is sokkal világosabb, ha átfogalmazzuk gráfokra. Ilyen szóhasználatlálva azt kell igazolnunk, hogy bárhogyan is rendelünk egy  $n$  pontú teljes gráf éleihez nemnegatív élhosszakot, a gráfnak létezik egy aciklikus (azaz irányított kört nem tartalmazó) irányítása, és az  $n$  csúcs mindegyikéhez hozzárendelhető egy-egy nemnegatív potenciál úgy, hogy a csúcsok potenciálösszege ne haladja meg az élek összhosszát, továbbá bármely  $uv$  irányított él esetén az  $u$  és  $v$  csúcsok potenciálkülönbsége legalább az  $uv$  él hossza legyen.

A megoldás kulcsa, hogy a potenciálok megválasztásának sorrendje az  $l_{ij}$  élhosszakhoz tartozó úgynevezett minvissza sorrend. Ez úgy kapható, hogy tetszőleges csúcsból kiindulva, ha már kiválasztottuk a sorrend első néhány elemét, akkor a soron következő csúcs az lesz, amelynek osztávolsága az eddig választott csúcsoktól minimális. Ha ezek után a gráf minden élét a minvissza sorrendben korábban felbukkanó csúcsból a sorrendben később szereplő csúcsba irányítjuk, akkor a potenciálokat természetes módon definiálva éppen a kérdéses  $a_i$  számokat kapjuk meg.

Érdekes, hogy míg a hasonló módon definiált maxvissza sorrendet sokat vizsgálták (a segítségével például hatékony algoritmus adható arra, hogy egy összefüggő gráfban megtaláljuk a lehető legkevesebb élt, amelyek elhagyásától a gráf már nem marad összefüggő), addig a minvissza sorrendnek a bizottság tudomása szerint nem ismert hasonló alkalmazása.