Megoldás. (a) A P_1, P_2 és P_3 sokszögeknek válasszuk ki két csúcsát (X-et és Y-t) úgy, hogy e két csúcs különböző sokszögekhez tartozzék és

$$d := |\overline{XY}|$$

távolságuk maximális legyen. Mivel a három sokszögnek összesen véges sok csúcsa van, ez valóban megtehető. Feltehetjük, hogy $X \in P_1$ és $Y \in P_2$.

Az X és Y választása folytán a P_3 sokszög benne van az X köré rajzolt d sugarú körben és az Y köré rajzolt d sugarú körben is. Mivel P_3 bármely Z pontjára az XYZ háromszög területe legfeljebb egységnyi, ezért a P_3 sokszöglemez része egyúttal annak a sávnak is, amelyet az XY egyenessel párhuzamos, attól $2/d$ távolságra levő egyenesek határolnak.

E megfigyeléseinkből az adódik, hogy a P_3 sokszög benne van abban a T téglalapban, amelynek XY egy középvonala és az XY-ra merőleges oldalának hossza $4/d$. Ráadásul P_3 a T egyetlen csúcsát sem tartalmazhatja a fenti két körön belüli elhelyezkedése folytán, ezért P_3 területe bizonyosan kisebb T területénél, azaz $d \cdot \dfrac{4}{d} = 4$-nél. A feladat (a) részében pedig pontosan ezt kellett igazolnunk.

(b) Legyen H_3 az origót tartalmazó egypontú halmaz, H_1 és H_2 pedig az origó körüli $\sqrt{2}$ sugarú kör. Bárhogyan is választunk egy-egy pontot e halmazokból, azok olyan háromszöget alkotnak, amelynek van két, legfeljebb $\sqrt{2}$ hosszúságú szomszédos oldala, így a területe legfeljebb egységnyi.

A H_1-be, illetve H_2-be írt négyzet átlójának hossza $2\sqrt{2}$, vagyis e négyzet oldalhossza 2, területe pedig 4. Tehát mind H_1, mind H_2 területe határozottan nagyobb 4-nél. Található tehát olyan pozitív ε szám, amelyre az origó középpontú, $\sqrt{2} - \varepsilon$ sugarú kör területe 4-nél nagyobb. Válasszuk ezután a P_1 és P_2 sokszögeket úgy, hogy mindkettő tartalmazza az origó középű $\sqrt{2} - \varepsilon$ kört, de benne legyen az origó középű $\sqrt{2} - \varepsilon/2$ sugarú körben. Legyen P_3 tetszőleges olyan konvex sokszöglemez, amely benne van az origó középű $\varepsilon/2$ sugarú körben. Megmutatjuk, hogy az így választott P_1, P_2 és P_3 konvex sokszöglemezek rendelkeznek a (b) részben előírt tulajdonsággal.

Mivel a sokszöglemezeket úgy választottuk, hogy P_1 és P_2 területe 4-nél nagyobb, ezért mindössze azt kell igazolni, hogy ha $A \in P_1$, $B \in P_2$ és $C \in P_3$, akkor az ABC háromszög területe nem lehet 1-nél nagyobb. Toljuk el az ABC háromszöget úgy, hogy a C csúcs az origóba kerüljön. A konstrukció folytán az A, B és C csúcsok eltoltjai benne lesznek a H_1, H_2, illetve H_3 halmazokban, ezért a fenti megfigyelésünk szerint az eltolt háromszög területe nem nagyobb egynél. Ugyanez igaz tehát magára az ABC háromszögre is, nekünk pedig éppen ezt kellett bizonyítanunk.$\square$

Megjegyzés. A feladatot a bizottság sajnos pontatlanul tűzte ki: lemaradt az a kikötés, hogy a P_1, P_2 és P_3 sokszöglemezek egy síkba esnek. Szerencsére ez nem okozott félreértést, mert minden megoldó élt ezzel a kimondatlan feltevéssel.