Megjegyzés. A feladat szövegéből sajnálatosan kimaradt, hogy síkban vagy térben értendő, a beküldők nagyjából fele-fele arányban választották az egyik, illetve másik lehetőséget. Szerkesztőségi döntés alapján mindkét értelmezést teljes értékűnek fogadtuk el, mivel a térbeli esetet nem ítéljük lényegesen nehezebbnek a síkbelinél. Tekintsünk ugyanis egy S síkot, amely az adott öt darab $S_1^+, \dots, S_5^+$ félsík egyikére sem merőleges. Vetítsük le a félsíkokat merőlegesen az S síkra. Az S sík választása miatt a vetületek is félsíkok, jelölje őket rendre $\widehat{S}_1^+, \dots, \widehat{S}_5^+$. Ha valamely négy vetület metszete, mondjuk $\widehat{S}_1^+ \cap \dots \cap \widehat{S}_4^+$ korlátos, akkor őseik metszete, $S_1^+ \cap \dots \cap S_4^+$ is korlátos, ugyanis az $S_1^+ \cap \dots \cap S_4^+$ metszet illeszkedik pl. S_1^+ síkjára, amely nem merőleges S-re. Így a síkbeli változatból azonnal következik, hogy az állítás térben is igaz. A közölt mintamegoldás a síkbeli esettel foglalkozik.

Megoldás. Jelölje a félsíkokat határoló egyeneseket a, b, c, d és e, a megfelelő félsíkokat pedig a_+, b_+, c_+, d_+ és e_+.

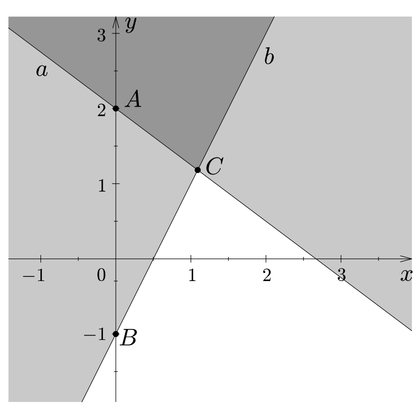
Két félsíkot azonos állásúnak nevezünk, ha metszetük is egy félsík. Ez pontosan akkor történhet meg, ha határoló egyeneseik párhuzamosak, és a metszetük egybeesik valamely félsíkkal, rövidebben: ha az egyik félsík tartalmazza a másikat. Tegyük fel, hogy a félsíkokat meghatározó a, b, c, d és e egyenesek között van három párhuzamos. Az általuk meghatározott félsíkok között a skatulya-elv szerint van kettő azonos állású, ezek közül a bővebbet elhagyva a megmaradó négy metszete megegyezik az eredeti öt metszetével, vagyis korlátos. A továbbiakban feltesszük, hogy a, b, c, d és e közül mindegyik legfeljebb egy másikkal párhuzamos.

Válasszuk úgy a koordinátarendszert, hogy az e egyenes épp az y-tengelyre essen, az e_+ félsík pedig az $x \geq 0$ pontokból álljon. Az előbbiek szerint feltehető, hogy az a, b és c egyenesek nem párhuzamosak e-vel. Az a_+ félsíkot nevezzük „fentinek”, ha pontosan azokból az (x, y) pontokból áll, amelyekre $y \geq y_0$, ahol (x, y_0) az a egyenes pontja. Szemléletesen a definíció világos, az a egyenes feletti félsík a_+. Hasonlóan beszélhetünk lenti félsíkról, valamint értelemszerűen b_+ és c_+ félsíkok is fentiek vagy lentiek. (Ha a határoló egyenes párhuzamos az y-tengellyel, a definíció nem értelmes, de ezt az esetet kizártuk.)

Ismét a skatulya-elv szerint a_+, b_+ és c_+ között van kettő, ami egyszerre fenti, vagy lenti. Feltehető tehát, hogy a_+ és b_+ is fenti. (Ha mindkettő lenti, tükrözzünk az x-tengelyre.) Ha az a és b egyenesek párhuzamosak, akkor a_+ és b_+ azonos állásúak, közülük a bővebbet elhagyva a megmaradó négy metszete megegyezik az eredeti öt metszetével, vagyis korlátos. Legyen tehát a és b metszéspontja $C(c_x, c_y)$, az y-tengelyt pedig messék az $A(0, a_y)$, illetve $B(0, b_y)$ pontokban. Szintén az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a_y \geq b_y$. Ha $c_x \leq 0$, akkor $a_+ \cap e_+$ metszetet tartalmazza b_+, ezért b_+-t elhagyva az öt félsíkból a metszet nem változik, így korlátos marad. Ha $c_x > 0$, akkor $e_+ \cap b_+ = (e_+ \cap a_+ \cap b_+) \cup ABC\triangle$. Ezért

$$\begin{aligned} &b_+ \cap c_+ \cap d_+ \cap e_+ = c_+ \cap d_+ \cap (e_+ \cap b_+) = \\ &= c_+ \cap d_+ \cap ((e_+ \cap a_+ \cap b_+) \cup ABC\triangle) = \\ &= (a_+ \cap b_+ \cap c_+ \cap d_+ \cap e_+) \cup (c_+ \cap d_+ \cap ABC\triangle), \end{aligned}$$

ahol az első tag a feltevés szerint korlátos, a második pedig az $ABC\triangle$ része, így szintén korlátos. A két korlátos halmaz uniója is korlátos, amivel az állítást beláttuk.



Megjegyzés. A legtöbb megoldó az öt félsík lehetséges metszete szerinti esetvizsgálatot végzett. Tipikus hiba volt, hogy a megoldó nem foglalkozott minden lehetséges esettel (üres halmaz, egyetlen pont, egy szakasz, egy háromszög, egy (konvex) négyszög, egy (konvex) ötszög), illetve az egyes alesetek vizsgálatába is számtalan kisebb-nagyobb hiba csúszott, ezért a sok részpontos megoldás.