Megoldás. Teljes indukcióval belátható, hogy a sorozat minden eleme létezik és legalább 1: $a_1 = 1$. Ha $a_{n-1} \geq 1$, akkor $7a_{n-1}^2 - 3 > 0$ és

$$\frac{4a_{n-1} + \sqrt{7a_{n-1}^2 - 3}}{3} > \frac{4}{3} > 1.$$

Ebből azonnal látható, hogy

$$a_n = \frac{4a_{n-1} + \sqrt{7a_{n-1}^2 - 3}}{3} \geq \frac{4a_{n-1} + \sqrt{4a_{n-1}^2}}{3} = 2a_{n-1} > a_{n-1},$$

azaz a sorozat szigorúan monoton növekvő is.

Azt fogjuk bizonyítani, hogy minden $n \geq 2$ egészre teljesül, hogy a_{n-1} és a_n egyaránt racionálisak.

$a_1 = 1$ és $a_2 = \dfrac{4 + \sqrt{7 - 3}}{3} = 2$, így a_1, a_2 racionálisak, azaz $n = 2$-re igaz az állítás.

Rendezzük át az $a_n = \dfrac{4a_{n-1} + \sqrt{7a_{n-1}^2 - 3}}{3}$ egyenletet:

$$\begin{aligned}
3a_n - 4a_{n-1} &= \sqrt{7a_{n-1}^2 - 3}, \\
(3a_n - 4a_{n-1})^2 &= 7a_{n-1}^2 - 3, \\
9a_n^2 - 24a_n a_{n-1} + 9a_{n-1}^2 + 3 &= 0, \\
a_{n-1}^2 - \frac{8}{3}a_n a_{n-1} + a_n^2 + \frac{1}{3} &= 0.
\end{aligned}$$

A most kapott egyenletet felírhatjuk eggyel nagyobb n-nel is:

$$a_{n+1}^2 - \frac{8}{3}a_n a_{n+1} + a_n^2 + \frac{1}{3} = 0.$$

Ezek szerint az a_{n-1} és a_{n+1} egyaránt megoldásai az

$$x^2 - \frac{8}{3}a_n x + a_n^2 + \frac{1}{3} = 0$$

másodfokú egyenletnek (mivel $a_{n+1} > a_{n-1}$, azért különböző megoldásokról van szó). A Viéte-formulák szerint tehát

$$a_{n-1} + a_{n+1} = \frac{8}{3}a_n.$$

Így ha tudjuk, hogy a_{n-1} és a_n egyaránt racionálisak, akkor abból következik, hogy $a_{n+1} = \dfrac{8}{3}a_n - a_{n-1}$ is racionális.

Az eddigiek alapján a_1 és a_2 racionálisak, továbbá tudjuk, hogy ha a_{n-1} és a_n egyaránt racionálisak, abból következik, hogy a_n és a_{n+1} is egyaránt racionálisak. Ezek alapján teljes indukcióval minden $n \geq 2$ egészre teljesül, hogy a_{n-1} és a_n egyaránt racionálisak; tehát a sorozat mindegyik tagja racionális.