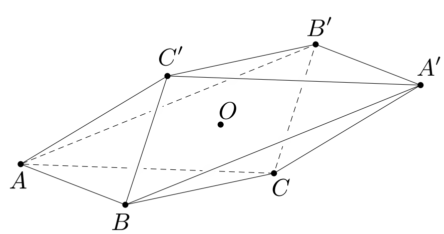
Megoldás. Felhasználjuk a következő ismert tételt: bármely konvex poliédernek van háromszög lapja, vagy olyan csúcsa, amelyre pontosan három él illeszkedik. (Lásd például: Sklarszkij–Csencov–Jaglom: *Válogatott fejezetek és tételek az elemi matematika köréből 3.;* 44. feladat. (17. old.).) Így elegendő a következő két esetet vizsgálni.

I. eset: Tegyük fel, hogy az A csúcsra pontosan három él illeszkedik: AB, AC és AD. Ekkor az A csúcsra illeszkedő három lapsík $\langle ABC\rangle$, $\langle ABD\rangle$ és $\langle ACD\rangle$, ahol $\langle\cdot\rangle$ értelemszerűen a meghatározott síkot jelöli. A csúcsoknak az O szimmetriaközéppontra vonatkozó tükörképei legyenek értelemszerűen A', B', C' és D'. A feltétel szerint minden A'-től különböző csúcs, így B', C' és D' is illeszkedik valamely A-ra illeszkedő lapsíkra. Világos, hogy B és B' nem illeszkedhet közös lapsíkra, ezért $B'\in\langle ACD\rangle$. A szimmetria miatt $\langle BD'A'C'\rangle$ is lapsík, vagyis A' illeszkedik az $\langle ACD\rangle$-kal párhuzamos, B-re illeszkedő síkra. Hasonló megfontolással láthatjuk, hogy A' illeszkedik az $\langle ABD\rangle$-kal párhuzamos, C-re illeszkedő síkra; valamint az $\langle ABC\rangle$-kal párhuzamos, D-re illeszkedő síkra is. Nyertük, hogy A' éppen az AB, AC és AD élek által feszített paralelepipedon A-val szemközti csúcsa; B', C' és D' a paralelepipedon további csúcsai. Azt is megmutattuk, hogy $\langle ABC'D\rangle$, $\langle ABD'C\rangle$ és $\langle ACB'D\rangle$, valamint ezek tükörképei: $\langle A'B'CD'\rangle$, $\langle A'B'DC'\rangle$ és $\langle A'C'BD'\rangle$ mind lapsíkok, így a poliéder szükségképpen az $ABCDA'B'C'D'$ paralelepipedon.

II. eset: Tegyük fel, hogy, hogy ABC egy háromszöglap. A szimmetriaközéppontot továbbra is jelölje O, az ABC lap tükörképe legyen értelemszerűen $A'B'C'$.

Első lépésként belátjuk, hogy az A, B, C, A', B' és C' pontok éppen egy paralelepipedon lapközéppontjai. Legyen $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ és $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$, ekkor a szimmetria miatt $\overrightarrow{OA'}=-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB'}=-\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{OC'}=-\mathbf{c}$. Tekintsük azt a nyolc pontot, amelyekbe az O-ból mutató vektorok $\pm\mathbf{a}\pm\mathbf{b}\pm\mathbf{c}$ alakúak. Ezek egy olyan paralelepipedon csúcsai, amelynek lapközéppontjai A, B, C, A', B' és C'. Ezt triviálisan teljesülő vektorazonosságok segítségével igazolhatjuk, a részletek végiggondolását az Olvasóra bízzuk.

Megmutatjuk, hogy a poliéderünknek az A, B, C, A', B' és C' pontoktól különböző csúcsa nem lehet. Tegyük fel, hogy D egy további csúcs. A feltétel szerint D az A, B, C, A', B' és C' pontok mindegyikével illeszkedik egy közös lapra, vagyis a DA, DB, DC, DA', DB' és DC' szakaszok mind a poliéder felszínén haladnak, továbbá D szükségképpen szigorúan az $\langle ABC\rangle$ és $\langle A'B'C'\rangle$ síkok közé esik (hiszen a feltevés szerint ABC és $A'B'C'$ háromszöglapok). Nyilvánvaló, hogy $D\notin\langle BCB'C'\rangle$, továbbá feltehető, hogy D a $BCB'C'$ sík A-val átellenes oldalára esik (különben A és A' szerepét felcseréljük az indoklásban). A DA szakasz a feltevés szerint a $BCB'C'$ paralelogrammát legfeljebb a határán metszheti, ezért a D pontot vagy az $\langle ABC'\rangle$ vagy az $\langle ACB'\rangle$ elválasztja O-tól (ide értve azt is, hogy esetleg D rajta van az $\langle ABC'\rangle$ vagy az $\langle ACB'\rangle$ síkok valamelyikén). Ismét az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy D-t az $\langle ABC'\rangle$ választja el O-tól. Ez viszont azt is jelenti, hogy az $\langle A'B'C\rangle$ egyazon nyílt félterébe esik D és O. Összességében azt kaptuk, hogy D benne van a $B'C$, $B'C'$ és $B'A'$ közös B' kezdőpontú félegyenesek által meghatározott nyílt „térnyolcadban". Ebből következik, hogy a $D'B'$ szakasz metszi az $ABCA'B'C'$ poliéder belsejét, amivel ellentmondásra jutottunk.



Ezzel az állítást beláttuk.