Megoldás. Az egyenletrendszer bármely két változó felcserélése esetén változatlan marad, így ha egy megoldást találunk, akkor annak összes lehetséges permutációja is megoldás lesz. Először számoljuk ki $xy+yz+zx$ és xyz értékét. Nevezetes azonosságok alapján egyrészt:

$$9 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 7 + 2(xy + yz + zx),$$

ahonnan adódik, hogy $xy + yz + zx = 1$. Másrészt háromtagú összeg köbének kifejtése és azonos átalakítások alapján:

$$\begin{aligned}27 &= (x+y+z)^3 = \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3\big(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2\big) + 6xyz = \\ &= 15 + 3\big(x^2y + xy^2 + xyz + y^2z + yz^2 + xyz + z^2x + zx^2 + xyz\big) - 3xyz = \\ &= 15 + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz = 15 + 3\cdot 3 - 3xyz.\end{aligned}$$

A két oldal összehasonlításából kapjuk, hogy $xyz = -1$. Innen az is látható, hogy egyik gyök sem lehet nulla. Most néhány algebrai átalakítás után az x ismeretlenre harmadfokú egyenlethez jutunk. Az összegből kifejezhető $y+z$:

$$y + z = 3 - x.$$

A szorzatból pedig yz-t tudjuk azonnal x-szel kifejezni: $yz = -\frac{1}{x}$. Ez utóbbi két tényt felhasználva csak egy változó marad az egyenletben:

$$1 = xy + yz + zx = x(y+z) + yz = x(3-x) - \frac{1}{x}.$$

A kapott egyenlet:

$$1 = 3x - x^2 - \frac{1}{x},$$

illetve rendezés után $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$. Ennek az egyenletnek az $x = 1$ megoldása, így az $(x-1)$ gyöktényező kiemelhető:

$$(x-1)\big(x^2 - 2x - 1\big) = 0.$$

Az egyenlet további két gyöke $x = 1 + \sqrt{2}$ és $x = 1 - \sqrt{2}$. A szimmetria miatt ennek a három számnak az összes permutációi adják az eredeti egyenletrendszer összes megoldását. Az egyenletrendszernek tehát hat megoldása van. Behelyettesítéssel látható, hogy a kapott értékek valóban az egyenletrendszer gyökei.

Megjegyzések. 1. Az egyenletrendszer megoldása során megkaptuk az $x+y+z$, $xy+yz+zx$ és xyz értékét, amelyek egy harmadfokú egyenlet Viète-formulái. Így az egyenletrendszer összes megoldását megkaphatjuk az $u^3 - 3u^2 + u + 1 = 0$ egyenlet gyökeiként. Ez pontosan megfelel az előzőekben leírt megoldásnak.

2. Azok a versenyzők, akik nem részletezték a harmadfokú egyenlet megoldását, vagy nem ellenőrizték a kapott gyököket, nem kaphattak teljes pontszámot. Ez okozza a hiányos dolgozatok viszonylag nagy számát.