Megoldás. A megoldás érdekében a tagokat megfelelően csoportosítjuk, majd ezekre a csoportokra külön-külön alkalmazzuk a számtani és harmonikus közepek közti egyenlőtlenséget, melynek a következő alakját használjuk:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i} \geq \frac{m^2}{\sum_{i=1}^{m} a_i},$$

ahol egyenlőség pontosan akkor van, ha minden a_i egyenlő.

Először is vegyük észre, hogy az (i,j) és a (j,i) párokból álló

$$\frac{1}{|x_i - x_j|} + \frac{1}{2\pi - |x_i - x_j|}$$

összegek kétszer szerepelnek (ezért lesznek a csoportosításnál a 2-es együtthatók).

A következő tagokra bontsuk szét a szummát:

$$2\bigg(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_{i+1} - x_i} + \frac{1}{2\pi - (x_n - x_1)}\bigg),$$

$$2\bigg(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{x_{i+2} - x_i} + \frac{1}{2\pi - (x_{n-1} - x_1)} + \frac{1}{2\pi - (x_n - x_2)}\bigg),$$

általában pedig tetszőleges $1 \leq k \leq n-1$-re a k-adik csoport legyen:

$$2\bigg(\sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{x_{i+k} - x_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2\pi - (x_{i+n-k} - x_i)}\bigg).$$

Könnyen látható, hogy minden tag pontosan egyszer szerepel, hiszen egy csoportban éppen azok a tagok vannak benne, melyekre az x_i és x_j között ugyanannyi x_m van, éspedig a k-adik csoportban $k-1$.

Ezeket a csoportokat egyesével alulról tudjuk becsülni a számtani és harmonikus közepek közti egyenlőtlenség alapján:

$$2\bigg(\sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{x_{i+k} - x_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2\pi - (x_{i+n-k} - x_i)}\bigg) \geq$$
$$\geq \frac{2n^2}{\sum_{i=1}^{n-k}(x_{i+k} - x_i) + \sum_{i=1}^{k}(2\pi - (x_{i+n-k} - x_i))} =$$
$$= \frac{2n^2}{2k\pi + \sum_{i=k+1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n-k} x_i - \left(\sum_{i=n-k+1}^{n} x_i - \sum_{i=k}^{n} x_i\right)} = \frac{n^2}{\pi} \cdot \frac{1}{k}.$$

Összegezve ezeket a becsléseket éppen a bizonyítandót kapjuk.

Egyenlőség akkor áll, ha minden számtani-harmonikus becslésben egyenlőség teljesül, $k = 1$-re is. A $k = 1$ esetben a számtani-harmonikus becslésben n tag szerepel, melyek összege 2π, vagyis bármely két szomszédos x_{i+1} és x_i különbsége $\frac{2\pi}{n}$. Ekkor a többi becslésben is egyenlőség van, hiszen

$$x_{i+k} - x_i = k \cdot \frac{2\pi}{n},$$

és

$$2\pi - x_{i+n-k} - x_i = 2\pi - \frac{2\pi}{n}(n-k) = k \cdot \frac{2\pi}{n}.$$

Tehát egyenlőség akkor és csak akkor van, ha minden $1 \leq i \leq n-1$-re

$$x_{i+1} - x_i = \frac{2\pi}{n}.$$