Megoldás. Egy ilyen polinom együtthatói abszolút értékeinek az összege nem lehet nulla, hiszen az azt jelentené, hogy az összes együttható nulla, viszont a feladat feltételei szerint p nem azonosan nulla polinom.

Ha az összeg 1, akkor a polinomnak $p(x) = \pm x^k$ alakúnak kell lennie, ahol k természetes szám. Ez azonban nem lesz minden esetben osztható 2016-tal, hiszen például $p(1) = \pm 1$, ami nyilván nem osztható 2016-tal.

A következőkben azt fogjuk belátni, hogy a keresett összeg lehet 2. Ennek érdekében tekintsük a $p(x) = x^5 \cdot \left(x^{48} - 1\right)$ polinomot. A továbbiakban többször felhasználjuk az Euler–Fermat-tételt, amely szerint, ha a és n egymáshoz relatív prím pozitív egészek, akkor $n \mid a^{\varphi(n)} - 1$, illetve ugyanez kongruenciával

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod (n),$$

ahol $\varphi(n)$ az n-nél nem nagyobb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma.

A 2016 prímtényezős felbontása: $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

(i) Először belátjuk, hogy $32 \mid p(n)$, minden n természetes szám esetén.

– Ha $2 \mid n$, akkor $2^5 \mid n^5$, amiből azonnal következik, hogy $2^5 \mid p(n)$.

– Ha n páratlan, akkor $(n, 32) = 1$ miatt $n^{\varphi(32)} = n^{16} \equiv 1 \bmod (32)$. Ebből az is következik, hogy $n^{48} \equiv 1 \bmod (32)$, vagyis $n^{48} - 1$ osztható 32-vel.

(ii) Most igazoljuk, hogy $9 \mid p(n)$, minden n természetes szám esetén.

– Ha $3 \mid n$, akkor $3^5 | n^5$, amiből látható, hogy $9 \mid p(n)$.

– Ha n nem osztható 3-mal, akkor az Euler-Fermat-tétel szerint $n^{\varphi(9)} = n^6 \equiv 1 \bmod (9)$. Ebből következően $n^{48} \equiv 1 \bmod (9)$ is teljesül, azaz $9 \mid n^{48} - 1$, $p(n)$ osztható 9-cel.

(iii) Végül belátjuk, hogy $7 \mid p(n)$, minden n természetes szám esetén.

– Ha $7 \mid n$, akkor $7^5 \mid n^5$, amiből rögtön következik, hogy $7 \mid p(n)$.

– Ha $7 \nmid n$, akkor viszont az Euler-Fermat-tétel szerint $n^{\varphi(7)} = n^6 \equiv 1 \bmod (7)$. Ebből következően $n^{48} \equiv 1 \bmod (7)$ is teljesül, azaz $7 \mid n^{48} - 1$, $p(n)$ osztható 7-cel.

Mivel 32, 9 és 7 páronként relatív prímek, a fentiek alapján $p(n)$ a szorzatukkal is osztható. Találtunk tehát egy olyan $p(n)$ polinomot, amely minden n természetes szám esetén osztható 2016-tal és az együtthatók abszolút értékének összege 2.

Megjegyzés. A $p(x) = x^5 \left(x^{48} - 1\right)$ polinom helyett bármilyen más polinom megfelel, amelyben az első tényezőben az x kitevője legalább 5, a második tényezőben pedig a 48 helyett a 6 és a 16 valamelyik pozitív közös többszöröse szerepel.