I. megoldás. Az egyenletrendszer értelmezési tartománya: $x \neq 0$; $y \neq 0$; $z \neq 0$. A második egyenlet bal oldalán lévő törteket közös nevezőre hozva:

$$\frac{yz - xz - xy}{xyz} = \frac{1}{8}.$$

Mindkét oldalt megszorozva $xyz = 8$-cal:

$$yz - xz - xy = 1.$$

Felhasználva a megadott egyenletrendszert és azt, hogy $x \neq 0$, tovább alakítjuk az egyenletet:

$$\begin{aligned} yz - x(y+z) &= 1, \\ \frac{8}{x} - x(8-x) &= 1, \\ \frac{8}{x} - 8x + x^2 - 1 &= 0, \\ 8 - 8x^2 + x^3 - x &= 0, \\ x^2(x-8) - (x-8) &= 0, \\ (x-8)\big(x^2-1\big) &= 0, \\ (x-8)(x+1)(x-1) &= 0. \end{aligned}$$

Tehát x értékei: $x_1 = 8$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

Ha $x = 8$, akkor $y + z = 0$, $z = -y$. Ebből:

$$\begin{aligned} xy(-y) &= 8, \\ -8y^2 &= 8, \\ y^2 &= -1. \end{aligned}$$

Egy valós szám négyzete nem lehet negatív, így ellentmondáshoz jutottunk, x nem lehet 8.

Ha $x = 1$, akkor $y + z = 7$, $z = 7 - y$. Ebből:

$$\begin{aligned} xy(7-y) &= 8, \\ 7y - y^2 - 8 &= 0, \\ y = \frac{7 \pm \sqrt{49-32}}{2} &= \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}. \end{aligned}$$

Tehát ha $x = 1$, akkor két eset lehetséges y-ra és z-re:

$$y = \frac{7+\sqrt{17}}{2} \quad \text{és} \quad z = \frac{7-\sqrt{17}}{2}, \quad \text{illetve}$$
$$y = \frac{7-\sqrt{17}}{2} \quad \text{és} \quad z = \frac{7+\sqrt{17}}{2}.$$

Ha $x = -1$, akkor $y + z = 9$, $z = 9 - y$. Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned} xy(9-y) &= 8, \\ -y(9-y) &= 8, \\ -9y + y^2 - 8 &= 0, \\ y &= \frac{9 \pm \sqrt{81+32}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{113}}{2}. \end{aligned}$$

Tehát $x = -1$ esetén is két eset lehetséges y-ra és z-re:

$$y = \frac{9+\sqrt{113}}{2} \quad \text{és} \quad z = \frac{9-\sqrt{113}}{2}, \quad \text{illetve}$$
$$y = \frac{9-\sqrt{113}}{2} \quad \text{és} \quad z = \frac{9+\sqrt{113}}{2}.$$

II. megoldás. A nevezők miatt $x, y, z \neq 0$. A második egyenletet alakítva:

$$\begin{aligned} yz - xz - xy &= 1, \\ yz = 1 + xz + xy &= \frac{8}{x}, \\ x + x^2z + x^2y &= 8 = x + y + z, \\ x^2z + x^2y &= y + z, \\ x^2(y+z) &= y + z, \\ (y+z)\big(x^2-1\big) &= 0, \\ (y+z)(x-1)(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Ha $y = -z$, akkor az eredeti egyenletrendszerből:

$$\begin{aligned} x \cdot (-z) \cdot z &= 8, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z} = \frac{1}{x} &= \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

amiből $-z^2 = 1$ következne, de ez lehetetlen. Ekkor tehát nincs megoldás.

Ha $x = 1$, akkor:

$$\begin{aligned} y + z &= 7, \\ yz &= 8, \\ 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ebből egyrészt $y = 7 - z$, és így az $yz = 8$ egyenletet alakítva:

$$\begin{aligned} z(7-z) &= 8, \\ z^2 - 7z + 8 &= 0, \\ z_{1,2} &= \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{7-\sqrt{17}}{2}, \qquad y_1 = \frac{7+\sqrt{17}}{2}; \\ z_2 &= \frac{7+\sqrt{17}}{2}, \qquad y_2 = \frac{7-\sqrt{17}}{2}. \end{aligned}$$

Hasonló gondolatmenettel, $x = -1$ esetén $y = 9 - z$ és $yz = -8$-ból a

$$z^2 - 9z - 8 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Az ehhez tartozó megoldások:

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{9-\sqrt{113}}{2}, \qquad y_3 = \frac{9+\sqrt{113}}{2}; \\ z_4 &= \frac{9+\sqrt{113}}{2}, \qquad y_4 = \frac{9-\sqrt{113}}{2}. \end{aligned}$$

III. megoldás. Először kössük ki, hogy az x, y és z számok közül egyik sem lehet nulla, hiszen az egyik egyenletben a nevezőben szerepelnek.

Az $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{8}$ egyenletet xyz-vel szorozva kapjuk:

$$yz - xz - xy = \frac{xyz}{8}.$$

Mivel $xyz = 8$, a jobb oldalon 1 áll:

$$yz - xz - xy = 1.$$

Felhasználva, hogy $x + y + z = 8$, vagyis $z = 8 - x - y$:

$$\begin{aligned} y(8-x-y) - x(8-x-y) - xy &= 1, \\ 8y - xy - y^2 - 8x + x^2 + xy - xy &= 1, \\ 0 &= y^2 + (x-8)y - x^2 + 8x + 1. \end{aligned}$$

Ez egy másodfokú egyenlet y-ra, a megoldóképlet alapján:

$$y = \frac{8 - x \pm \sqrt{(x-8)^2 + 4(x^2 - 8x - 1)}}{2} = \frac{8 - x \pm \sqrt{5x^2 - 48x + 60}}{2}. \tag{1}$$

Most másféleképpen is ki fogjuk fejezni y-t x-ből. Tudjuk, hogy $xyz = 8$, vagyis $z = \frac{8}{xy}$, tehát

$$8 - x - y = \frac{8}{xy}.$$

Szorozva xy-nal:

$$8xy - x^2y - xy^2 = 8,$$
$$xy^2 + \left(x^2 - 8x\right)y + 8 = 0.$$

Ez ismét egy másodfokú egyenlet y-ra ($x \neq 0$), így újra felírva a megoldóképletet:

$$y = \frac{8x - x^2 \pm \sqrt{(x^2 - 8x)^2 - 4 \cdot x \cdot 8}}{2x} = \frac{8x - x^2 \pm \sqrt{x^4 - 16x^3 + 64x^2 - 32x}}{2x}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenleteket egymással egyenlővé téve kaphatunk egy olyan egyenletet, amelyben csak x szerepel:

$$\frac{8 - x \pm \sqrt{5x^2 - 48x + 60}}{2} = \frac{8x - x^2 \pm \sqrt{x^4 - 16x^3 + 64x^2 - 32x}}{2x}.$$

Itt a $\pm$ jelek egymástól függetlenül pluszt és mínuszt is jelenthetnek. Szorozva $2x$-szel:

$$8x - x^2 \pm x\sqrt{5x^2 - 48x + 60} = 8x - x^2 \pm \sqrt{x^4 - 16x^3 + 64x^2 - 32x},$$
$$\pm x\sqrt{5x^2 - 48x + 60} = \pm\sqrt{x^4 - 16x^3 + 64x^2 - 32x}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emeljük:

$$x^2(5x^2 - 48x + 60) = x^4 - 16x^3 + 64x^2 - 32x,$$
$$5x^4 - 48x^3 + 60x^2 = x^4 - 16x^3 + 64x^2 - 32x,$$
$$4x^4 - 32x^3 - 4x^2 + 32x = 0.$$

Osztva 4-gyel:

$$x^4 - 8x^3 - x^2 + 8x = 0.$$

Látszik, hogy ennek az egyenletnek $x = 0$, $x = 1$ és $x = -1$ is gyöke, ezeket kiemelhetjük:

$$x\left(x^3 - 8x^2 - x + 8\right) = 0,$$
$$x(x-1)\left(x^2 - 7x - 8\right) = 0,$$
$$x(x-1)(x+1)(x-8) = 0.$$

Ebből tehát $x \in \{-1, 0, 1, 8\}$. A kikötésünk alapján $x \neq 0$, így $x \in \{-1, 1, 8\}$.

Nézzük először azt az esetet, amikor $x = 8$. Ekkor (1) alapján

$$y = \frac{8 - x \pm \sqrt{5x^2 - 48x + 60}}{2}$$

lenne, de a négyzetgyök alatt negatív szám szerepel ($5 \cdot 8^2 - 48 \cdot 8 + 60 = -4$), tehát ebben az esetben y-ra nem kapunk valós megoldást. $x = 8$ így nem ad megoldást.

Most nézzük az $x = 1$ esetet. Ekkor (1) alapján

$$y = \frac{8 - x \pm \sqrt{5x^2 - 48x + 60}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Ez tehát két megoldást jelent, és ekkor

$$z = 8 - x - y = 8 - 1 - \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2} = \frac{7 \mp \sqrt{17}}{2}.$$

Maradt még az $x = -1$ eset. Ekkor (1) alapján

$$y = \frac{8 - x \pm \sqrt{5x^2 - 48x + 60}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{113}}{2},$$

itt is két megoldás van, és

$$z = 8 - x - y = 8 + 1 - \frac{9 \pm \sqrt{113}}{2} = \frac{9 \mp \sqrt{113}}{2}.$$

Összesen tehát négy megoldást kaptunk:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1, & y_1 &= \frac{7+\sqrt{17}}{2}, & z_1 &= \frac{7-\sqrt{17}}{2};\\
x_2 &= 1, & y_2 &= \frac{7-\sqrt{17}}{2}, & z_2 &= \frac{7+\sqrt{17}}{2};\\
x_3 &= -1, & y_3 &= \frac{9+\sqrt{113}}{2}, & z_3 &= \frac{9-\sqrt{113}}{2};\\
x_4 &= -1, & y_4 &= \frac{9-\sqrt{113}}{2}, & z_4 &= \frac{9+\sqrt{113}}{2}.
\end{aligned}$$

Ez lényegében két megoldásnak vehető, ha y-t és z-t felcserélhetőnek tartjuk. (Az eredeti egyenletrendszerben y és z szimmetrikusan helyezkedik el.)

Mivel a megoldás során nem csak ekvivalens átalakításokat használtunk, le kell ellenőriznünk, hogy ezek a megoldások valóban jók-e. Az $y - z$ szimmetria miatt elegendő a két lényegesen különböző megoldást leellenőrizni.

Az első megoldásban $x = 1$, $y = \frac{7+\sqrt{17}}{2}$, $z = \frac{7-\sqrt{17}}{2}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
xyz = yz &= \frac{7+\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{7-\sqrt{17}}{2} = \frac{49-17}{4} = \frac{32}{4} = 8,\\
x + y + z &= 1 + \frac{7+\sqrt{17}}{2} + \frac{7-\sqrt{17}}{2} = 1 + 7 = 8,\\
\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= 1 - \frac{2}{7+\sqrt{17}} - \frac{2}{7-\sqrt{17}} =\\
&= \frac{\left(7-\sqrt{17}\right)\left(7+\sqrt{17}\right) - 2\left(7-\sqrt{17}\right) - 2\left(7+\sqrt{17}\right)}{\left(7-\sqrt{17}\right)\left(7+\sqrt{17}\right)} =\\
&= \frac{32 - 14 + 2\sqrt{17} - 14 - 2\sqrt{17}}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Az első megoldás tehát jó.

Nézzük a másodikat, itt $x = -1$, $y = \frac{9+\sqrt{113}}{2}$ és $z = \frac{9-\sqrt{113}}{2}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
xyz = -yz &= -\frac{9+\sqrt{113}}{2} \cdot \frac{9-\sqrt{113}}{2} = -\frac{81-113}{4} = -\frac{-32}{4} = 8,\\
x + y + z &= -1 + \frac{9+\sqrt{113}}{2} + \frac{9-\sqrt{113}}{2} = -1 + 9 = 8,\\
\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= -1 - \frac{2}{9+\sqrt{113}} - \frac{2}{9-\sqrt{113}} =\\
&= \frac{-\left(9-\sqrt{113}\right)\left(9+\sqrt{113}\right) - 2\left(9-\sqrt{113}\right) - 2\left(9+\sqrt{113}\right)}{\left(9-\sqrt{113}\right)\left(9+\sqrt{113}\right)} =\\
&= \frac{32 - 18 + 2\sqrt{113} - 18 - 2\sqrt{113}}{-32} = \frac{-4}{-32} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

A második megoldás is jó, vagyis tényleg ez a két lényegesen eltérő megoldás (azaz négy (x, y, z) számhármas) van.