

**I. megoldás.** Ha  $n$  legalább 7, akkor  $n!$  osztható 7-tel. A 2 hatványainak 7-tel való osztási maradéka 1, 2 vagy 4 lehet, hiszen  $2^0 = 1$ ,  $2^1 = 2$ ,  $2^2 = 4$ ,  $2^3 = 8 = 1 \cdot 7 + 1$ ,  $2^4 = 2^3 \cdot 2 = (1 \cdot 7 + 1) \cdot 2 = 2 \cdot 7 + 2$ ,  $2^5 = 2^4 \cdot 2 = (2 \cdot 7 + 2) \cdot 2 = 4 \cdot 7 + 4$  stb. Azonban egy olyan kéttagú  $c + d$  összeg, ahol  $c, d \in \{1, 2, 4\}$  nem osztható 7-tel, ezért megoldást csak  $n \leq 6$ -ra remélhetünk. Ezek közül pedig csak  $3! = 6 = 2^2 + 2^1$ , és  $4! = 24 = 2^4 + 2^3$  felel meg. (Mindkét eset külön-külön két megoldás, hiszen  $a$  és  $b$  szerepe felcserélhető.)

A megoldások tehát:

$n$	3	3	4	4
$a$	1	2	3	4
$b$	2	1	4	3

**II. megoldás.** A 7 helyett vizsgálhatjuk a 15-tel való osztási maradékokat, illetve az azokat egyértelműen meghatározó 3-as és 5-ös maradékokat. Nyilván  $2^0 \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $2^1 \equiv -1 \pmod{3}$ ,  $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$  stb., illetve  $2^0 \equiv 1 \pmod{5}$ ,  $2^1 \equiv 2 \pmod{5}$ ,  $2^2 \equiv -1 \pmod{5}$ ,  $2^3 \equiv -2 \pmod{5}$ ,  $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$  stb.; ebből látható, hogy  $2^a + 2^b$  pontosan akkor osztható 3-mal, ha  $a$  és  $b$  különböző paritásúak, míg az 5-tel való oszthatóságnak az a feltétele, hogy  $a$  és  $b$  azonos paritású legyen. A két feltétel nem teljesülhet egyszerre, ezért  $2^a + 2^b = n!$  nem osztható  $3 \cdot 5$ -tel, így csak  $n \leq 4$  jöhet szóba, melyből az I. megoldásbeli eredményt kapjuk.