

Megoldás. Nincs ilyen szám: bármely a -ra létezik olyan x , amelyre a két érték nem relatív prím.

A fenti állítás igazolásához elég a páratlan a -kat vizsgálni, hiszen páros a esetén minden páratlan x -re $x^2 + 3$ és $(x + a)^2 + 3$ egyaránt páros, így nem relatív prímelek egymáshoz.

Megmutatom, hogy bármely páratlan a -ra $x = \frac{a^2 - a + 12}{2}$ esetén a két kérdéses érték nem relatív prím. ($\frac{a^2 - a + 12}{2}$ mindig pozitív egész, mert $a^2 - a$, és így $a^2 - a + 12$ is mindig páros és értelemszerűen pozitív.) Azonos átalakításokkal:

$$\begin{aligned} 2x &= a^2 - a + 12, & 2x + a &= a^2 + 12, & 2ax + a^2 &= a^3 + 12a, \\ 2a^2x - 12a &= 2a^2x + a^3 - (a^3 + 12a) = a(2ax + a^2) - (2ax + a^2) = \\ &= (a - 1)(2ax + a^2), \\ a^2x - 6a &= \frac{a - 1}{2}(2ax + a^2), \\ 2a(x^2 + 3) &= 2ax^2 + 6a = 2ax^2 + a^2x - (a^2x - 6a) = \\ &= x(2ax + a^2) - \frac{a - 1}{2}(2ax + a^2) = \left(x - \frac{a - 1}{2}\right)(2ax + a^2), \end{aligned}$$

így

$$x^2 + 3 = \frac{x - \frac{a-1}{2}}{2}(2x + a).$$

Mivel a páratlan, 4-gyel osztva 1-et vagy 3-at adhat maradékul. Az előbbi esetben $x = \frac{a(a - 1) + 12}{2}$ páros, ahogy $\frac{a - 1}{2}$ is. Így $x - \frac{a - 1}{2}$ páros, tehát $\frac{x - \frac{a-1}{2}}{2}$ egész. Az utóbbi esetben pedig $x = \frac{a(a - 1) + 12}{2}$ páratlan, ahogy $\frac{a - 1}{2}$ is. Így $x - \frac{a - 1}{2}$ páros, tehát $\frac{x - \frac{a-1}{2}}{2}$ akkor is egész. Így $(2x + a)$ mindig osztója $x^2 + 3 = \frac{x - \frac{a-1}{2}}{2}(2x + a)$ -nak.

Hasonlóan

$$\begin{aligned} (x + a)^2 + 3 &= x^2 + 3 + 2ax + a^2 = \frac{x - \frac{a-1}{2}}{2}(2x + a) + a(2x + a) = \\ &= \left(\frac{x - \frac{a-1}{2}}{2} + a\right)(2x + a); \end{aligned}$$

ez szintén osztható $(2x + a)$ -val, ami 1-nél nagyobb egész. Tehát $x^2 + 3$ és $(x + a)^2 + 3$ valóban nem relatív prímelek.