Megoldás. Mivel $0 < x < \frac{\pi}{2}$, az egyenlőtlenség szögfüggvényeit felírhatjuk az ABC derékszögű háromszög x hegyesszögének szögfüggvényeiként:

$$\sin x = \frac{a}{c}, \quad \cos x = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{b}{a}.$$

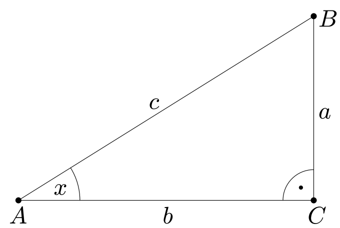
Ezek felhasználásával a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{c}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{c}} \geq 2.$$

Bármely p, q pozitív valós számra igaz a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség:

$$\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}\,.$$

A háromszög oldalai pozitív számok, így $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{c}}$ és $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{c}}$ is azok.



Alkalmazzuk a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget ezekre:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{c}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{c}} \geq 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{c}} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{c}}}.$$

A négyzetgyökjel alatti kifejezést átalakítva:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{c}} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{c}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{c}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{b}{c}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{c}}.$$

Ezzel

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{c}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{c}} \geq 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{c}}}.$$

Ha $a > b$, akkor $\frac{a}{b} > 1$ és $\frac{a-b}{c} > 0$, így

$$\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{c}}} > 1, \quad \text{tehát} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{c}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{c}} > 2.$$

Ha $a < b$, akkor

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{c}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{a-b}{c}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b-a}{c}}.$$

Mivel $\frac{b}{a} > 1$ és $\frac{b-a}{c} > 0$, emiatt

$$\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b-a}{c}}} > 1, \quad \text{tehát} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{c}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{c}} > 2.$$

Ha $a = b$, akkor $x = 45^\circ$, ezért $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x = 1$, tehát $1^{\frac{a}{c}} + 1^{\frac{b}{c}} = 2$.