Megoldás. Legyen $x=1\circ 1$. Bizonyítani fogjuk a megoldás során, hogy tetszőleges a, b egészekre $a\circ b=a\cdot b\cdot x$.

Ehhez először be fogjuk látni, hogy a művelet kommutatív, azaz: $a\circ b=b\circ a$. Mivel $0\circ 0=0\circ(0+0)=0\circ 0+0\circ 0$, ezért mindkét oldalból elvéve $0\circ 0$-t, rögtön adódik, hogy $0\circ 0=0$.

Következő lépésként kiszámítjuk $0\circ a$ értékét:

$$0\circ a=0\circ(a+0)=a\circ 0+0\circ 0=a\circ 0=a\circ(0+0)=0\circ a+0\circ a,$$

azaz $0\circ a=0\circ a+0\circ a$, így $0\circ a=0$. Ebből már következik a $\circ$ művelet kommutativitása is:

$$a\circ b=a\circ(b+0)=b\circ a+0\circ a=b\circ a.$$

Ezután igazoljuk, hogy $1\circ b=b\cdot x$. Teljes indukciót alkalmazunk b-re. Először tekintsük a $b>0$ esetet. Ekkor $b=1$ esetén igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $b=k$ esetén is igaz, és lássuk be $b=k+1$-re. $(k+1)$-re az állítás:

$$1\circ(k+1)=k\circ 1+1\circ 1=1\circ k+1\circ 1=k\cdot x+x=(k+1)\cdot x.$$

Tehát $1\circ b=b\cdot x$ tetszőleges 1-nél nagyobb b-re.

Most ugyanezt igazoljuk a nem pozitív egészekre is. $b=1$-től kezdünk itt is, és feltesszük, hogy az állítás teljesül $b=k$-ra. Ekkor $(k-1)$-re:

$$1\circ(k-1)=k\circ 1+(-1)\circ 1=1\circ k+(-1)\circ 1=k\cdot x+(-1)\circ 1,$$

vagyis azt kellene még bebizonyítani, hogy $(-1)\circ 1=-x$. Ehhez induljunk ki $1\circ 1=x$ -ből. $1\circ(1-1)=1\circ 1+(-1)\circ 1=x+(-1)\circ 1$, viszont $1-1=0$, tehát $x+(-1)\circ 1=1\circ 0=0$, ezzel $(-1)\circ 1=-x$. A fentiek alapján az $1\circ b=b\cdot x$ állítás tetszőleges b egészre teljesül.

Végül használjunk az eredeti állítás igazolásához is teljes indukciót. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $a>0$. Ekkor $a=1$ esetén igaz az állítás, mert $1\circ b=1\cdot b\cdot x$. Tegyük fel, hogy $a=k$-ra igaz, ekkor $a=k+1$-re felírva:

$$(k+1)\circ b=b\circ(k+1)=k\circ b+1\circ b=k\cdot b\cdot x+b\cdot x=(k+1)\cdot b\cdot x.$$

Tehát $a\circ b=a\cdot b\cdot x$, ha $a>0$.

Nézzük ezután az $a\le 0$ esetet – ekkor a teljes indukció az ellenkező irányban történik. A kiindulás itt is $a=1$, amire igaz az állítás. Feltéve, hogy $a=k$-ra igaz, $a=k-1$-re felírva:

$$(k-1)\circ b=b\circ(k-1)=k\circ b+(-1)\circ b=k\cdot b\cdot x+(-1)\circ b,$$

vagyis azt kellene belátni, hogy $(-1)\circ b=-b\cdot x$. Az $1\circ b=b\cdot x$ből kiindulva

$$(1-1)\circ b=b\circ(1-1)=1\circ b+(-1)\circ b=b\cdot x+(-1)\circ b,$$

de mivel $1-1=0$, azért $b\cdot x+(-1)\circ b=b\circ 0=0$, tehát $(-1)\circ b=-b\cdot x$. Ezzel valóban

$$(k-1)\circ b=k\cdot b\cdot x+(-1)\circ b=k\cdot b\cdot x-b\cdot x=(k-1)\cdot b\cdot x.$$

Tehát $a\circ b=a\cdot b\cdot x$ minden a egész szám esetén teljesül.