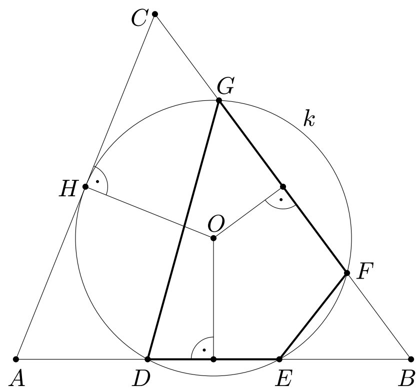
Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit, az oldalakat a megfelelő kisbetűkkel jelöljük. A $DEFG$ négyszög a feladat feltételeinek megfelelően húrnégyszög úgy, hogy a körülírt köre érinti a háromszög AC oldalát. Ezért a négyszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást. Mivel D és E is harmadolópontok, azért $AD = EB = \frac{c}{3}$, így az AB és a DE szakaszok felezőpontjai egybeesnek. Hasonlóan igaz, hogy a BC és az FG szakaszok felezőpontjai is egybeesnek. Ezért a $DEFG$ négyszög körülírt (k) körének O középpontja egyben az ABC háromszög körülírt körének is középpontja, hiszen rajta van az AB és BC oldalak felező merőlegesén is.



A k kör az AC oldalt H-ban érinti. Ekkor $OH \perp AC$. Mivel OH átmegy az ABC háromszög köré írt kör középpontján és merőleges AC-re, OH az AC oldal felező merőlegese, vagyis H az AC oldal felezőpontja.

Írjuk fel a B és C pontok k körre vonatkozó hatványát kétféleképpen.

A B ponté: $\frac{2c^2}{9} = \frac{3a^2}{16}$, a C ponté: $\frac{b^2}{4} = \frac{3a^2}{16}$.

Rendezve: $b^2 = \frac{3a^2}{4}$ és $c^2 = \frac{27a^2}{32}$. Ebből meghatározható az oldalak négyzetének aránya:

$$a^2 : b^2 : c^2 = 1 : \frac{3}{4} : \frac{27}{32},$$

illetve az oldalak aránya:

$$a : b : c = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

Ebből – az a oldal hosszát egységnyinek tekintve – koszinusztétel segítségével kiszámolhatjuk a háromszög szögeit:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma, \\ \frac{27}{32} &= 1 + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\gamma, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta, \\ \frac{3}{4} &= 1 + \frac{27}{32} - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \cos\beta. \end{aligned}$$

Ezekből kiszámolva a háromszög szögeinek értéke két tizedesjegyre kerekítve: $\gamma = 58{,}45^\circ$, $\beta = 53{,}46^\circ$ és $\alpha = 180^\circ - \gamma - \beta = 60{,}09^\circ$.