I. megoldás. Legyen a három oldal $a \leq b \leq c$, és jelöljük a hozzájuk tartozó magasságokat a szokásos módon.

Ha a háromszög nem derékszögű, akkor a magasságok és az oldalak által meghatározott derékszögű háromszögekből $m_b < a$ és $m_c < a$ is következik. Így $m_c < a \leq c$ miatt $m_c < c$, és $m_b < a \leq b$ miatt $m_b < b$ teljesül. Ebben az esetben tehát nem teljesül a feladat feltétele.

Ha a háromszög derékszögű, akkor $a \leq b < c$, hiszen a derékszög a legnagyobb oldallal szemközti szög. Ekkor $m_b = a$ és $m_a = b$ miatt $m_b \leq b$ és $a \leq m_a$. Az m_c és az a által meghatározott derékszögű háromszögből $c > a > m_c$. Tehát a feltétel csak akkor tud teljesülni, ha $m_b = b$, amiből $a = b$ következik. Ekkor a két befogóra teljesül, hogy legfeljebb akkorák, mint a hozzájuk tartozó magasság.

Ezzel beláttuk az állítást.

II. megoldás. A szokásos jelölésekkel legyen $a \leq m_a$ és $b \leq m_b$.

Pont és szakasz közötti távolság akkor a legrövidebb, ha a pontból merőlegest bocsájtunk az egyenesre. Vagyis egy háromszögben a szomszédos oldalakhoz tartozó magasság mindig rövidebb vagy egyenlő hosszúságú, mint az adott oldal. Ennek alapján: $m_b \leq a$ és $m_a \leq b$.

A négy egyenlőség alapján felírhatjuk, hogy $m_b \leq a \leq m_a \leq b \leq m_b$. Ez pedig akkor és csak akkor teljesül, hogy ha $a = b = m_a = m_b$, vagyis a háromszög egyenlő szárú és derékszögű, mivel a magasságvonalak hossza megegyezik az oldalak hosszával, vagyis páronként egy egyenesbe esnek.

III. megoldás. A feladat feltétele szerint legyen $m_a \geq a$ és $m_b \geq b$, továbbá jelölje a háromszög területét T, az a és b oldal által bezárt szöget pedig γ.

Tudjuk, hogy $T = \dfrac{am_a}{2} = \dfrac{bm_b}{2} = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$, amiből a feltételeket felhasználva $2T = am_a \geq a^2$ és $2T = bm_b \geq b^2$ következik.

Mivel $0 \leq \sin\gamma \leq 1$, és $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ miatt $a^2 + b^2 \geq 2ab$, felírhatjuk a következő egyenlőtlenség-láncolatot:

$$4T \geq a^2 + b^2 \geq 2ab \geq 2ab\sin\gamma = 4 \cdot \frac{ab\sin\gamma}{2} = 4T.$$

Látható, hogy ekkor mindenütt egyenlőség teljesül, azaz $a = m_a$, $b = m_b$, $a = b$ és $\gamma = 90°$.

Megjegyzés. A sok 4 pontos dolgozat annak köszönhető, hogy nagyon sokan hivatkoztak általános esetben az I. megoldásban is szereplő derékszögű háromszögekre, ám azok nem mindig jönnek létre.