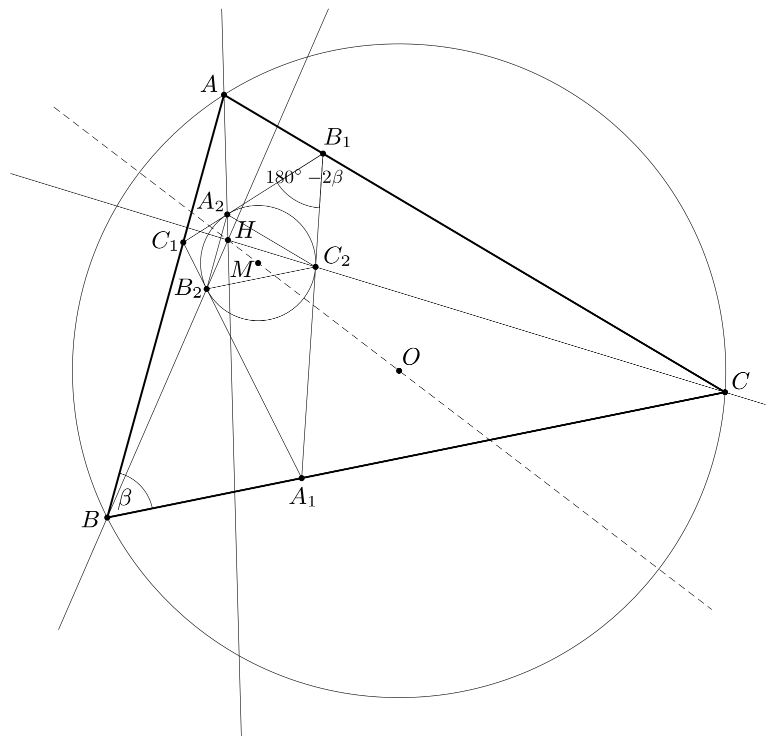
Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. A Thalész-tétel megfordítása miatt BCB_1C_1 húrnégyszög, hiszen a BC szakasz a B_1 és C_1 pontokból is derékszög alatt látszik. Hasonlóan ABA_1B_1 és ACA_1C_1 is húrnégyszög. A húrnégyszög-tételt ABA_1B_1-ben, illetve BCB_1C_1-ben alkalmazva kapjuk, hogy $A_1B_1A\sphericalangle = 180° - \beta$ és $C_1B_1C\sphericalangle = 180° - \beta$. Ezekből $C_1B_1A\sphericalangle = A_1B_1C\sphericalangle = \beta$ adódik, amiből rögtön következik, hogy $A_1B_1C_1\sphericalangle = 180° - 2\beta$, valamint hogy BB_1 felezi az $A_1B_1C_1\sphericalangle$-et.



Hasonló megfontolásokkal kapjuk, hogy $B_1A_1C\sphericalangle = C_1A_1B\sphericalangle = \alpha$, $B_1C_1A\sphericalangle = A_1C_1B\sphericalangle = \gamma$, és $A_1B_1C_1$ belső szögei rendre $180° - 2\alpha$, $180° - 2\beta$, $180° - 2\gamma$, belső szögfelezői pedig éppen AA_1, BB_1 és CC_1, az ABC háromszög magasságvonalai. Beláttuk tehát, hogy $A_1B_1C_1$ beírt körének középpontja M, az ABC magasságpontja. Ebből azonnal következik, hogy A_2, B_2 és C_2 éppen a beírt kör érintési pontjai $A_1B_1C_1$ megfelelő oldalain, s így M az $A_2B_2C_2$ körülírt körének középpontja is. Ismét a Thalész-tétel megfordítása és a húrnégyszög-tétel miatt $A_1C_2MB_2$ húrnégyszög, hiszen B_2 és C_2 szögei derékszögek. Innen $B_2MC_2\sphericalangle = 2\alpha$ adódik, és kihasználva, hogy MB_2C_2 egyenlőszárú kapjuk, hogy $MB_2C_2\sphericalangle = MC_2B_2\sphericalangle = 90° - \alpha$ és $C_2B_2A_1\sphericalangle = \alpha$. Ebből $BA_1B_2\sphericalangle = \alpha$ miatt $BC \parallel B_2C_2$ adódik. Analóg módon beláthatjuk, hogy $AB \parallel A_2B_2$ és $AC \parallel A_2C_2$. Ezekből következik, hogy az ABC és $A_2B_2C_2$ háromszögek hasonlóak, hiszen szögeik páronként megegyeznek.

Legyen $H = AA_2 \cap BB_2$. Az a H centrumú φ középpontos nagyítás, ami az A_2B_2 szakaszt AB-be viszi, képezze C_2-t C^*-ba. Mivel $ABC\triangle \sim A_2B_2C_2\triangle \sim ABC^*\triangle$, azért $ABC\triangle \cong ABC^*\triangle$, amiből $C = C^*$, és így $H \in CC_2$ következik. Ezzel az állítás első felét beláttuk, az AA_2, BB_2 és CC_2 egyenesek a H pontban metszik egymást. Továbbá a φ középpontos nagyítás az $A_2B_2C_2$ körülírt körének M középpontját ABC körülírt körének O középpontjába viszi, így $H \in OM$, vagyis H valóban illeszkedik ABC Euler-egyenesére.