Megoldás. Felhasználjuk, hogy a racionális és az irracionális számok is mindenütt sűrűn helyezkednek el a valós számok között, azaz minden valós számhoz tetszőlegesen közel található tőle különböző racionális és irracionális szám is.

Megmutatjuk, hogy az a) és b) kérdésre a válasz igenlő, a c)-re pedig nemleges.

Az előbbihez legyen minden racionális szám piros és minden irracionális szám kék; a fentiek miatt ekkor Lilla minden valós számot lilának fog látni.

A b)-hez válasszunk előbb egy 1-nél nem nagyobb, pozitív racionális számokból álló, nullához tartó számsorozatot (ilyen például az $r_n = 1/n$ sorozat). Minden z egész számra és tetszőleges i indexre színezzük a $z + r_i$ számokat pirosra, az összes többi valós számot pedig kékre. Minden t egész számhoz tetszőlegesen közel található tőle különböző irracionális szám, ami most kék, és $t + r_i$ alakú szám is, ami piros; tehát minden egész szám lila. Legyen ezután b olyan valós szám, ami nem egész; jelölje a b-hez legközelebbi egész szám(ok) b-től való távolságát $d > 0$. Ekkor b-nek bármelyik piros ponttól való távolságára

$$\big|b - (z + r_i)\big| = \big|(b - z) - r_i\big| \geq |b - z| - |r_i| \geq d - |r_i|.$$

Mivel az (r_n) sorozat nullához tart, véges sok tagjának kivételével $|r_n| < d/2$ teljesül, így – véges sok i index kivételével – $\big|b - (z + r_i)\big| \geq d/2$. Ha pedig z nem a b-hez legközelebbi egy vagy két egész szám, akkor $|b - z| \geq 1 + d$. Tehát b véges sok kivételével minden piros számtól legalább $d/2$ távolságra van, ezért nem lehet lila.

Végül tegyük fel, hogy van egy olyan színezés, ami szerint minden racionális szám lilának látszik; megmutatjuk, hogy akkor ez szükségképpen az összes valós számra is fennáll. Legyen ugyanis v valós szám, e pedig tetszőleges (kicsi) pozitív szám. Létezik olyan r racionális szám, amelyre $v + e/3 < r < v + 2e/3$. Mivel r lila, található olyan tőle különböző p piros és k kék szám, amelyekre $|r - p| < e/3$ és $|r - k| < e/3$. Így $p, k > r - e/3 > v$ miatt p és k különbözik v-től, továbbá $|v - p| = \big|(v - r) + (r - p)\big| \leq |v - r| + |r - p| < 2e/3 + e/3 = e$, és hasonlóan $|v - k| < e$. Mindez azt jelenti, hogy v is lilának látszik. Tehát nem létezik olyan színezés, amely szerint Lilla pontosan a racionális számokat látná lilának.

Megjegyzés. Az egyik nagyon gyakori hiba a c) rész lehetetlenségének bizonyításánál fordult elő. Itt sokan látták be azt (vagy indultak ki abból), hogy ha egy t irracionális számnak bármilyen kicsi $(t - x, t + x)$ környezetében van egy piros és egy kék pont, akkor t-t lilának látjuk. Ebben ott van a hiba, hogy ez a környezet tartalmazhatja t-t is, és ha például ebben t az egyedüli piros pont, az összes többi pedig kék, akkor ettől még lehet, hogy a t körüli környezet t-n kívül nem tartalmaz piros pontot, és ezáltal t nem látszik lilának. Az ebből fakadó hibák 1 pont levonással jártak.

Egy másik gyakori hiba az a) résznél adott rossz konstrukció volt: színezzük ki a számegyenest úgy, hogy a pontok KKPPKKPPKK… színsorrendben következzenek, és ekkor egy p pontot véve, a vele szomszédos két pont különböző színű, így p lila. Ezzel az a probléma, hogy a pontok között ilyen szomszédsági viszony nem létezik, két pont nem lehet „szomszédos" egymással. Egy a pontnak egy tőle különböző b pont nem lehet szomszédja, hiszen a két pont felezőpontja, $\dfrac{a+b}{2}$ közelebb esik a-hoz, mint b.