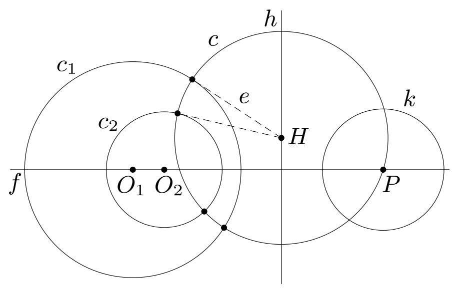
Megoldás. Kettő segédállítással kezdünk:

1. segédállítás: *Tegyük fel, hogy a c_1 és c_2 körvonalak nem metszik egymást. Ekkor létezik olyan inverzió*[1]*, amely a c_1 és c_2 köröket koncentrikus körökbe képezi.*

Az 1. segédállítás bizonyítása: Legyen c_1 középpontja O_1, c_2 középpontja O_2. Ha $O_1 = O_2$, akkor bármilyen O_1 pólusú inverzió megfelel.

Ha $O_1 \neq O_2$, akkor legyen a c_1 és c_2 körök hatványvonala h. Mivel c_1 és c_2 nem metszi egymást, h sem metszi a c_1 és c_2 körök egyikét sem. Legyen H a h hatványvonal tetszőleges pontja. A hatványvonal definíciója miatt H-ból a c_1 és c_2 körökhöz egyenlő hosszú érintők húzhatóak, jelöljük ezek közös hosszát e-vel, és tekintsük a H középpontú, e sugarú c kört. Világos, hogy c merőlegesen metszi c_1-et és c_2-t. Továbbá c két pontban metszi az $f = O_1O_2$ centrális egyenest. Legyen ezen metszéspontok egyike P, k pedig egy P középpontú tetszőleges kör (*1. ábra*).



1. ábra

Megmutatjuk, hogy a k-ra vonatkozó inverzió a kívánalmaknak eleget tesz. Legyenek értelemszerűen a megfelelő körök és egyenesek k-ra vonatkozó inverz képei a c_1' és c_2' körök, valamint az f' és c' egyenesek. Az inverzió szögtartása miatt f' és c' merőlegesen metszi c_1' és c_2' mindegyikét, vagyis az egymástól különböző f' és c' egyenesek illeszkednek a c_1' és c_2' körök középpontjaira. Ebből következik, hogy a c_1' és c_2' körök középpontja közös, vagyis c_1' és c_2' koncentrikusak. Ezzel a segédállítást beláttuk.

1. megjegyzés: A gondolatmenetből kiolvasható, hogy a különböző H középpontú körök szükségképpen ugyanabban a két pontban metszik az e centrálist. A háttérben valójában a c_1 és c_2 körök által generált elliptikus körsor, valamint a rá ortogonális (más szóhasználattal hozzá konjugált) hiperbolikus körsor geometriája húzódik, amiről bővebben Hajós György: *Bevezetés a geometriába* c. könyvének 40. pontjában olvashatunk.

2. megjegyzés: Az állítás erősíthető, előírhatjuk, hogy a koncentrikus c_1' és c_2' körök közül melyik legyen a belső, és melyik a külső. Ehhez a két kapott lehetséges P pont közül kell a megfelelőt kiválasztanunk. Ennek részletes belátását az olvasóra bízzuk, a továbbiakban csak azt fogjuk felhasználni, hogy ha c_1 belsejében van c_2, akkor elérhető, hogy c_2' is c_1' belsejében legyen; ehhez egy mindkét körön kívüli pólusra kell invertálni.

3. megjegyzés: Ha a c_1 és c_2 körök metszik egymást, nyilvánvalóan nincs olyan inverzió, amely őket koncentrikus körökbe képezi.

2. segédállítás: *Legyen a k kör középpontja O, ℓ egy O-ra illeszkedő egyenes, A, B, C és D pedig négy különböző, O-tól különböző pont ℓ-en. A k-ra vonatkozó inverzió az A, B, C és D pontokat rendre az A', B', C' és D' pontokba képezi. Ekkor*

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'},$$

ahol az $\dfrac{XY}{YZ}$ *arányhoz pozitív előjelet rendelünk, ha $Y \in \overline{XZ}$, egyébként pedig negatívat.*

A 2. segédállítás bizonyítása: Válasszuk a koordinátarendszert úgy, hogy O legyen az origó, k sugara legyen egységnyi, és az ℓ egyenes egybeessen az x-tengellyel. Ekkor az állítás ekvivalens a könnyen ellenőrizhető

$$\frac{a-c}{c-b} : \frac{a-d}{d-b} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}} : \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{d} - \frac{1}{b}}$$

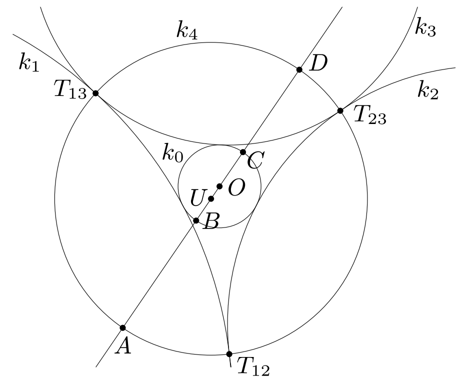
azonossággal. Ezzel a 2. segédállítást beláttuk.

4. megjegyzés: A 2. segédállítás egy speciális esete annak a ténynek, hogy az inverzió tartja a kettősviszonyt, lásd Dobos Sándor, Hraskó András, Kiss Géza, Surányi László: *Geometria, 11.–12. évfolyam* c. könyvében a 3.8. szakasz 3.2. és 3.3. feladatait, illetve Szőkefalvi-Nagy Béla: *Komplex függvénytan* c. könyvének 3. fejezetét.

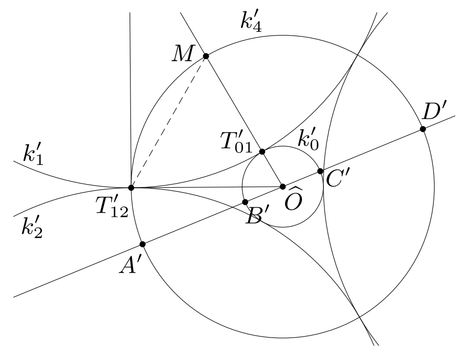
Ezután rátérünk a feladat megoldására. Az állítás csak abban az esetben igaz, ha a négy érintkező kör közül k_0 a középső, először ezzel az esettel foglalkozunk.

[1]Az inverzióról szóló ismertető cikket lásd honlapunkon: https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml.

Legyen k_4 a $T_{12}T_{23}T_{31}$ kör. Világos, hogy k_4 a belsejében tartalmazza k_0-t, és merőlegesen metszi a k_1, k_2 és k_3 köröket. Tegyük fel, hogy $O \neq U$ és messe az OU egyenes k_4-et az A és D pontokban, k_0-t a B és C pontokban a *2. ábra* szerint. Az 1. segédállítást, illetve a 2. megjegyzést felhasználva hajtsunk végre egy alkalmas P középpontú k körre vonatkozó inverziót, amely a k_0 és k_4 köröket a koncentrikus k_0' és k_4' körökbe képezi, ahol k_0' a k_4' belsejében van. A k_1, k_2 és k_3 körök k_1', k_2' és k_3' képei is körök lesznek, amelyek merőlegesen metszik k_4'-et, és kívülről érintik k_0'-t. Az A, B, C és D pontok egy P pólusból induló félegyenesre illeszkednek, ezért A', B', C' és D' képeik is, de sorrendjük az eredetihez képest megfordul. Így az inverzió után a *3. ábrát* kapjuk.



2. ábra



3. ábra

Használjuk a 3. ábra jelöléseit, k_0' és k_4' közös centruma legyen $\widehat{O}$. Mivel k_1', k_2' és k_3' merőlegesen metszik k_4'-t, egymást páronként kívülről érintik, valamint érintik a k_4'-vel koncentrikus k_0' kört, a sugaraik megegyeznek. Ebből könnyen látható, hogy $\widehat{O}\widehat{O_1}T_{12}'$ derékszögű háromszög $\widehat{O}$ szöge $60°$, átfogójának felezőpontja M. Így k_1' sugara egyrészt $\widehat{O_1}T_{01}' = 2R' - r'$, másrészt $\widehat{O_1}T_{12}' = \sqrt{3}R'$, ahol r' és R' rendre k_0' és k_4' sugarát jelöli. Innen $r' = \left(2 - \sqrt{3}\right)R'$ adódik, majd egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'} = \frac{R'-r'}{R'+r'} : \frac{R'+r'}{R'-r'} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Most alkalmazzuk a 2. segédállítást, amiből következik, hogy

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{1}{3}. \tag{1}$$

Bevezetve a $d = UV$ jelölést a 2. ábra szerint $AB = d + R - r$, $BD = R + r - d$, $AC = R + r + d$ és $CD = R - r - d$. Ezt visszahelyettesítve (1)-be nyerjük, hogy

$$\frac{R+d-r}{R+r-d} : \frac{R+r+d}{R-r-d} = \frac{1}{3},$$

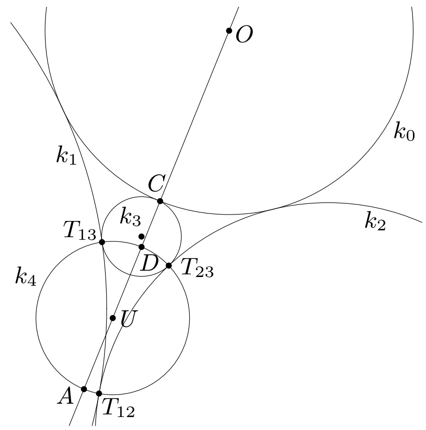
amiből a bizonyítandó $d^2 = R^2 - 4Rr + r^2$ összefüggés egyszerű átszorzással következik.

Hátra van az $O = U$ eset vizsgálata. Ekkor $d = 0$ és az inverzió előtti ábránk lényegében megegyezik a 3. ábrával, így $r = \left(2 - \sqrt{3}\right)R$, és $R^2 - 4Rr + r^2 = 0$ is azonnal következik. Ezzel azt az esetet beláttuk, amikor k_0 a középső kör.

Ha k_0 nem a középső az adott négy páronként érintő kör közül, akkor az állítás nem igaz, de nagyon hasonló formula teljesül. Ez az eset az előzőhöz analóg módon kezelhető, ezért csak vázlatosan ismertetjük a lépéseket. A megfelelő inverzió után ismét a 3. ábrát kapjuk, ezért (1) továbbra is érvényes. Azonban ez esetben a *4.ábra* szerint

$$AB = R + d + r, \quad BD = d + r - R,$$
$$AC = -r + d + R \text{ és } CD = d - r - R.$$

Ezt (1)-be visszaírva, rendezés után a $d^2 = R^2 + 4Rr + r^2$ összefüggést kapjuk.



4. ábra