Megoldás. A fémkorong vizsgálata előtt érdemes egy végtelen fémlemez esetéből kiindulni. Képzeljük el, hogy egy végtelen fémlap A pontjába $2I$ áramot vezetünk, a B pontból pedig elvezetjük azt. Ha csak az A jelű elektróda lenne jelen, a fémlemezben a bevezetett áram izotrop módon terjedne szét, így az A ponttól r_1 távolságra az áramsűrűség nagysága

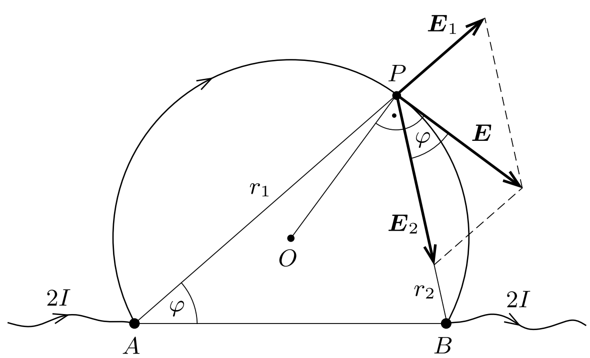
$$j_1 = \frac{2I}{2\pi r_1 d}$$

lenne. A differenciális Ohm-törvény értelmében ezt az áramsűrűséget a lemezben megjelenő $E_1 = \varrho j_1$ térerősségű elektromos mező tartja fenn, így az A elektróda hatására a végtelen fémlemezben az r_1 távolsággal fordítottan arányos erősségű, az A ponttal ellentétes irányba mutató, „sugaras" elektromos mező alakul ki. Hasonlóan, ha csak a B jelű csatlakozó lenne jelen, akkor r_2 távolságban $E_2 = 2\varrho I/(2\pi r_2 d)$ térerősségű, a B pont felé mutató elektromos tér jönne létre. Mivel mindkét elektróda jelen van, így a lemezben kialakuló elektromos tér (és áramsűrűség) az előbbi két eset szuperpozíciójaként (vektori összegeként) számolható.

Tekintsük most a végtelen fémlemez tetszőleges P pontját (lásd a *9. ábrát*)! Itt az A és B elektródák hatására külön-külön $\boldsymbol{E}_1$ és $\boldsymbol{E}_2$ térerősség alakul ki, melyek nagyságára az eddigiek szerint fennáll az

$$\frac{|\boldsymbol{E}_1|}{|\boldsymbol{E}_2|} = \frac{r_2}{r_1}$$

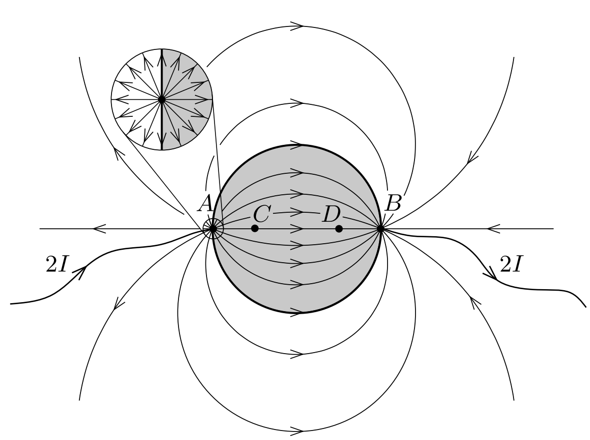
egyenlőség. Ebből és a váltószögek egyenlőségéből látszik, hogy az ABP háromszög hasonló a térerősségvektorok által meghatározott háromszöghöz, ezért az eredő térerősségvektor a PB szakasszal ugyanakkora szöget zár be, mint a PAB szög. Ez viszont azt jelenti, hogy az ABP háromszög (O középpontú) köréírt körét a P pontbeli eredő térerősség érinti, hiszen van két szögünk ($PAB\sphericalangle$, illetve az $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{E}_2$ vektorok által bezárt szög), melyek egyenlőségük miatt a kör ugyanazon PB ívéhez tartozó kerületi szögek.



9. ábra

A fentiekből következik, hogy az eredő térerősségvektor a fémsík tetszőleges pontjában érintője az A, B és a kiszemelt pontra illeszkedő körívnek, a lemezben kialakuló elektromos erővonalak (és így az áramvonalak is) tehát *körív alakúak,* melyek átmennek az A és B pontokon.

Most vágjuk ki gondolatban a végtelen fémlapból a *10. ábrán* látható, a feladatnak megfelelő korong alakú részt! A korong pereme mentén az áramok a kivágás előtt is érintő irányban folytak, így az áramokra kirótt határfeltétel automatikusan teljesül. A korong kivágása tehát nem változtatja meg sem a külső, sem a belső árameloszlást, és így a feszültségviszonyokat sem. A végtelen fémlapban az áram be- és kivezetési pontjának közvetlen közelében az árameloszlás izotrop volt (itt a távolabbi elektróda hatása már nem érződik), így a korong kivágása előtt a fémlemezbe vezetett $2I$ erősségű áramnak pontosan a fele jutott be a korongba (lásd a 10. ábra kinagyított részletét). A feladatbeli kérdés tehát egyenértékű azzal, hogy mekkora volt a feszültség a végtelen fémlap C és D pontjai között a korong kivágása előtt.



10. ábra

Az A pontban bevezetett $2I$ áram hatására az elektródától r távolságra a fémlap potenciálja (az A és B pontok között félúton, a korong középpontjában elhelyezkedő referenciaponthoz képest) a térerősség integrálásával kapható meg:

$$\Phi(r_1) = \int_{r_1}^{r_0} E_1(r')\,\mathrm{d}r' = \frac{2\varrho I}{2\pi d}\int_{r_1}^{r_0}\frac{1}{r'}\,\mathrm{d}r' = -\frac{\varrho I}{\pi d}\ln\frac{r_1}{r_0},$$

ahol $r_0 = r$. Ennek felhasználásával az A pontbeli elektróda által a C és D pontok között létrehozott feszültség nagysága

$$U_{CD}^{(A)} = \frac{\varrho I}{\pi d}\left(-\ln\frac{r}{2r_0} + \ln\frac{3r}{2r_0}\right) = \frac{\varrho I}{\pi d}\ln 3.$$

Ugyanekkora potenciálkülönbséget hoz létre a B jelű elektróda is, így a szuperpozíció értelmében a C és D pontok között eső feszültség

$$U_{CD} = U_{CD}^{(A)} + U_{CD}^{(B)} = 2U_{CD}^{(A)} = \frac{2\varrho I}{\pi d}\ln 3.$$

Ekkora tehát a kivágott fémkorong C és D pontjai közötti feszültség is.