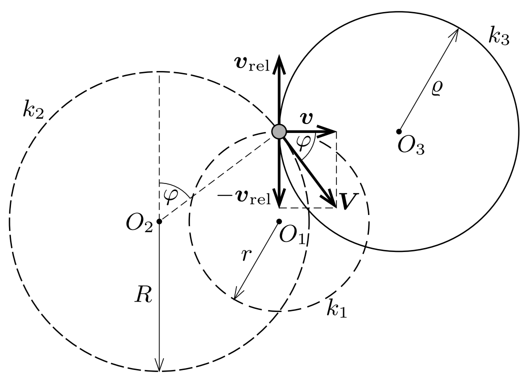
Megoldás. Ha a rajztábla és a pénzérme között a súrlódási tényező elegendően nagy lenne ($\mu > R\omega^2/g$), akkor a pénzérme nem csúszna meg, hanem a táblához tapadva követné annak mozgását. A feladat szövege szerint nem ez a helyzet, így a rajztábla indításakor a pénzérme azonnal megcsúszik. Sejthető, hogy néhány periódusidőnyi átmeneti (tranziens) szakasz után az érme mozgása állandósul. Megmutatjuk, hogy az egyenletes körmozgást végző pénzérme kielégíti a Newton-féle mozgásegyenletet.

Az m tömegű pénzérmére vízszintes irányban egyetlen erő hat: a μmg nagyságú, de állandóan változó irányú csúszási súrlódási erő. Stacionárius körmozgás esetén az érme sebességének nagysága állandó, ezért a súrlódási erő mindig merőleges a sebességvektorra. A pénzérme körmozgásának szögsebessége nem lehet más, mint a rajztábla mozgásának ω körfrekvenciája. A körpálya r sugarát a mozgásegyenletből határozhatjuk meg:

$$\mu mg = mr\omega^2, \qquad \text{ebből} \qquad r = \frac{\mu g}{\omega^2}. \tag{1}$$

Érdekes, hogy r nem függ a rajztábla pályájának R sugarától.



1. ábra

Most térjünk rá arra a kérdésre, hogy milyen nyomot hagy az érme a rajztáblán! Ehhez a két test relatív mozgását kell elemezni. Az *1. ábrán* látható r sugarú k_1 kör a pénzérme pályáját mutatja az álló vonatkoztatási rendszerben, az R sugarú k_2 kör a rajztábla éppen az érmével érintkező pontjának későbbi pályáját jelzi, végül pedig a ϱ sugarú k_3 kör a táblán hagyott grafitnyomnak felel meg. Az érmére ható csúszási súrlódási erő az O_1 pont felé mutat, ezzel ellentétes tehát az érme rajztáblához viszonyított $\boldsymbol{v}_{\text{rel}}$ sebessége. Az érme álló vonatkoztatási rendszerhez viszonyított $\boldsymbol{v}$ sebessége viszont erre merőleges, így a rajztábla érmével éppen érintkező pontjának $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\text{rel}}$ sebességére fennáll a Pitagorasz-tétel:

$$\boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{v}^2 + \boldsymbol{v}_{\text{rel}}^2. \tag{2}$$

Mivel az állandósult mozgásszakaszban mindhárom sebességvektor ω szögsebességgel forog az időben, a nagyságukat kifejezhetjük a körpályák sugarával:

$$|\boldsymbol{V}| = R\omega, \qquad |\boldsymbol{v}| = r\omega, \qquad |\boldsymbol{v}_{\text{rel}}| = \varrho\omega,$$

amelyeket a (2) egyenletbe írva a sugarak között kapunk összefüggést:

$$R^2 = r^2 + \varrho^2.$$

Ezt és az (1) eredményt felhasználva megkapjuk a pénzérme által a rajztáblán hagyott kör alakú grafitnyomok ϱ sugarát:

$$\varrho = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\mu g}{\omega^2}\right)^2}.$$

Az érme megcsúszásának $\mu < R\omega^2/g$ feltétele miatt ez mindig valós.

Megjegyzés. Az ábráról leolvasható, hogy az érme mozgása nincs szinkronban a rajztábla mozgásával, hanem ahhoz képest folyamatosan „késik". A fáziskésés φ szögét is a sebességvektorok által kifeszített derékszögű háromszög segítségével határozhatjuk meg:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{V}|} = \frac{r}{R} = \frac{\mu g}{R\omega^2},$$

amely csúszó érme esetén biztosan kisebb 1-nél.