I. megoldás. Válasszuk úgy a koordinátarendszert, hogy az ABC háromszög körülírt körének O középpontja az origóba kerüljön, a csúcsok koordinátái pedig legyenek $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ és $C(c_1,c_2)$. Ekkor a BC oldal felezőpontja $F_A\big((b_1{+}c_1)/2,(b_2{+}c_2)/2\big)$, és így az AF_A súlyvonal Thálesz-körének középpontja $O_A\big((2a_1{+}b_1{+}c_1)/4,(2a_2{+}b_2{+}c_2)/4\big)$.

Az ABC körülírt körének, illetve az AF_A súlyvonal Thálesz-körének közös húrja AA_1, ennek felezőmerőlegesére illeszkednek az O és O_A középpontok, ezért az AA_1-re A-ban állított merőleges normálvektora például

$$\overrightarrow{n_A}=4\overrightarrow{OO_A}^{(90^\circ)}=\big(-(2a_2+b_2+c_2),2a_1+b_1+c_1\big).$$

Bevezetve az $m_1=a_1+b_1+c_1$ és $m_2=a_2+b_2+c_2$ rövidítéseket, az AA_1-re A-ban állított merőleges egyenletére

$$-(m_2+a_2)x+(m_1+a_1)y=-(m_2+a_2)a_1+(m_1+a_1)a_2=m_1a_2-m_2a_1$$

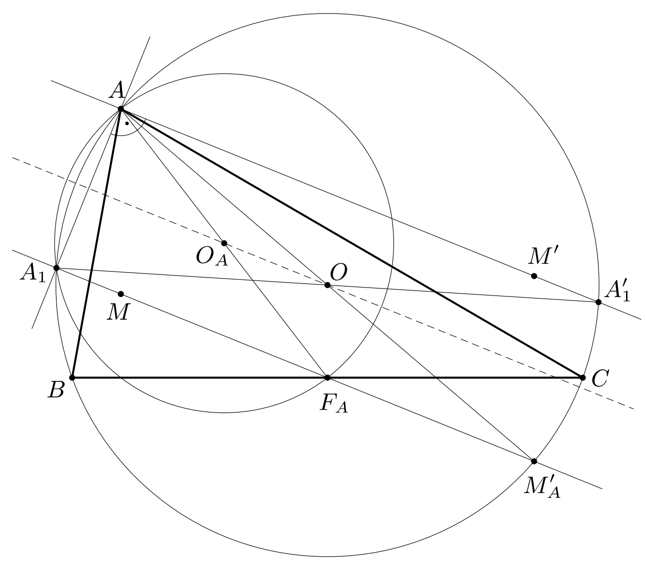
adódik. Hasonlóan a BB_1-re B-ben, illetve CC_1-re C-ben állított merőlegesek egyenletei rendre

$$-(m_2+b_2)x+(m_1+b_1)y=m_1b_2-m_2b_1$$

és

$$-(m_2+c_2)x+(m_1+c_1)y=m_1c_2-m_2c_1.$$

Tekintsük az $M'(-m_1,-m_2)$ pontot. Behelyettesítve a kapott egyenletekbe azonnal adódik, hogy M' mindhárom egyenesre illeszkedik, amivel a feladat állítását beláttuk.



II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit. Jól ismert tény, hogy az ABC háromszög M magasságpontjának az F_A pontra vonatkozó M_A' tükörképe éppen ABC körülírt körének A-val átellenes pontja, vagyis az A csúcs O-ra vonatkozó tükörképe. Így a Thálesz-tétel miatt egyrészt $AA_1M_A'\sphericalangle=90^\circ$, másrészt – mivel A_1 illeszkedik az AF_A átmérőjű körre is – $AA_1F_A\sphericalangle=90^\circ$. Az eddigiekből következik, hogy az A_1, M, F_A és M_A' pontok mind illeszkednek az AA_1 egyenesre A_1-ben állított merőlegesre.

Legyenek az A_1 és M pontok O-ra vonatkozó tükörképei A_1' és M'. Mivel M illeszkedik az A_1M_A' egyenesre, M' illeszkedik AA_1'-re. Viszont ismét a Thálesz-tétel miatt AA_1' éppen az AA_1-re A-ban állított merőleges egyenes. Hasonlóan megmutatható, hogy M' illeszkedik a BB_1-re B-ben állított merőlegesre, valamint a CC_1-re C-ben állított merőlegesre, amivel az állítást beláttuk.

Megjegyzés: Szintén jól ismert tény, hogy az I. megoldásban választott koordinátarendszer esetén $M(m_1,m_2)$ éppen ABC magasságpontja, így onnan is kiolvasható, hogy a szóbanforgó egyenesek közös pontja éppen M tükörképe O-ra.