Megoldás. Legyen $S = n + n^2 + \ldots + n^{2n-3} - 4$. Ha $n = 3$, akkor $2 \cdot 3 - 3 = 3$ és $3 + 3^2 + 3^3 - 4 = 35$, ami nem prím. Tehát S értéke legalább 35.

Ha n páros, akkor S egy 35-nél nagyobb páros szám lesz, ami nem lehet prím. Tehát n mindenképpen páratlan. Az n szám 10-es maradéka szerint öt eset lehetséges.

i) $n = 10k + 1$ (ahol k legalább 1). Ekkor $2n - 3 = 20k - 1$, és

$$S = (10k+1) + (10k+1)^2 + \ldots + (10k+1)^{20k-1} - 4.$$

Tekintsük a tagok utolsó számjegyét, ezek összege:

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{20k-1 \text{ darab}} - 4 = 20k - 5.$$

Tehát az utolsó számjegy ekkor 5, vagyis S osztható 5-tel.

ii) $n = 10k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$). Ekkor $2n - 3 = 20k + 3$ és

$$S = (10k+3) + (10k+3)^2 + \ldots + (10k+3)^{20k+3} - 4.$$

Vizsgáljuk ismét az utolsó számjegyeket:

$$\underbrace{3 + 9 + 7 + 1}_{20} + \underbrace{3 + 9 + 7 + 1}_{20} + \ldots + \underbrace{3 + 9 + 7}_{19} - 4.$$

Az utolsó számjegy ekkor is 5, vagyis S nem prím.

iii) $n = 10k + 5$ ($k \in \mathbb{N}$). Ekkor $2n - 3 = 20k + 7$. Az utolsó számjegyet az előzőekhez hasonlóan megvizsgálva, 1-et kapunk eredményül, vagyis ez lehet prímszám. Például $n = 5$ esetén $S = 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^7 - 4 = 97\,651$, ami prímszám.

iv) $n = 10k + 7$ ($k \in \mathbb{N}$). Ekkor $n = 20k + 11$, és

$$S = (10k+7) + (10k+7)^2 + \ldots + (10k+7)^{20k+11} - 4.$$

Az utolsó számjegyek:

$$\underbrace{7 + 9 + 3 + 1}_{20} + \underbrace{7 + 9 + 3 + 1}_{20} + \ldots + \underbrace{7 + 9 + 3}_{19} - 4.$$

Itt is 5 az utolsó számjegy, így S nem lehet prím.

v) $n = 10k + 9$ ($k \in \mathbb{N}$). Ekkor $2n - 3 = 20k + 15$, és

$$S = (10k+9) + (10k+9)^2 + \ldots + (10k+9)^{20k+15} - 4.$$

Az utolsó számjegyek:

$$\underbrace{9 + 1}_{10} + \underbrace{9 + 1}_{10} + \ldots + \underbrace{9 + 1}_{10} + 9 - 4.$$

Itt is 5 az utolsó számjegy.

Tehát az n szám végződése csak 5 lehet.

Megjegyzések. 1. Többen nem az utolsó számjegyet, vagyis a 10-es maradékot vizsgálták, hanem az 5-ös maradékot. Hasonló módon jutottak célhoz.

2. Az a tény, hogy a vizsgált S kifejezés az n minden páratlan, 5-tel nem osztható értékére osztható 5-tel, nem teljesen a véletlen műve. Írjuk az n-et $n = 2k + 1$ alakba. Ha n az 5-tel osztva 1-et ad maradékul, akkor ez minden hatványára is igaz, másrészt ilyenkor $2k$, és ezért k is osztható 5-tel. Így $n + n^2 + \ldots + n^{2n-3}$ értéke $2n - 3 = 4k - 1$ darab 1 maradékot adó szám összegeként -1-et ad maradékul, amiből 4-et kivonva 5-tel osztható számot kapunk. Egyébként pedig

$$S = n\big(1 + n + \ldots + n^{2n-4}\big) - 4 = n\frac{n^{2n-3} - 1}{n - 1} - 4 = \frac{n^{4k} - 1}{n - 1} - 5,$$

és itt $n^{4k} - 1$ Fermat „kis" tétele miatt osztható 5-tel, a tört nevezője pedig nem.