Megoldás. Legyenek a háromszög csúcsai $A(7;3)$, $B(b_1;b_2)$, $C(c_1;c_2)$, továbbá jelölje a súlypontot S, a magasságpontot pedig M.

Ismert, hogy a háromszög súlypontjának x, illetve y koordinátája a háromszög csúcspontjai x, illetve y koordinátáinak számtani közepe. Ennek alapján:

$$\frac{7+b_1+c_1}{3}=5, \quad \text{illetve} \quad \frac{3+b_2+c_2}{3}=-\frac{5}{3}.$$

A két egyenletből adódik: $b_1+c_1=8$ és $b_2+c_2=-8$.

Mivel M a magasságpont, ezért $\overrightarrow{MA}(4;4)$ merőleges $\overrightarrow{BC}(c_1-b_1;c_2-b_2)$-re. Tekintsük a két vektor skaláris szorzatát, ami a merőlegesség miatt 0. A skaláris szorzatukat a következő módon írhatjuk fel a vektorok koordinátáival: $4\cdot(c_1-b_1)+4\cdot(c_2-b_2)=0$. Ebből adódik, hogy $(c_1+c_2)-(b_1+b_2)=0$.

Összeadva a súlypont koordinátáit felíró két egyenlettel kapjuk, hogy $c_1+c_2=0$, amiből következik, hogy $b_1+b_2=0$. Vagyis $b_1=-b_2$ és $c_1=-c_2$. Innentől a következő jelölést fogjuk használni: $b_1=b$ és $c_1=c$.

Hasonlóan $\overrightarrow{MA}$-hoz és $\overrightarrow{BC}$-hez, $\overrightarrow{CA}(7-c;3+c)$ és $\overrightarrow{BM}(3-b;b-1)$ is merőlegesek egymásra. Írjuk fel e két vektor skaláris szorzatát (amely szintén 0) a vektorok koordinátáival:

$$\begin{aligned}(7-c)(3-b)+(3+c)(b-1)&=0,\\ 21-7b-3c+bc+3b-3+bc-c&=0,\\ bc-2b-2c+9&=0.\end{aligned}$$

A súlypont koordinátáinak felírásából adódó egyenletből fejezzük ki c-t: $c=8-b$. Ezt írjuk be az imént kapott egyenletbe:

$$\begin{aligned}b(8-b)-2b-2(8-b)+9&=0,\\ 8b-b^2-2b-16+2b+9&=0,\\ b^2-8b+7&=0.\end{aligned}$$

Ez egy másodfokú egyenlet b-re. A megoldóképlet felhasználásával: $b=1$ vagy $b=7$.

Ha $b=1$, akkor a másik két csúcs koordinátái: $(1;-1)$ és $(7;-7)$.

Ha $b=7$, akkor ugyanazt a két pontot kapjuk, b-t és c-t felcserélve.

Megjegyzés. A legtöbben a honlapon található megoldás gondolatmenetét követték, melyben BC felezőpontját, majd az $\overrightarrow{MA}$ normálvektor segítségével a BC egyenesét írjuk fel, utána a köré írt kör középpontjának koordinátáit az Euler-egyenes segítségével határozzuk meg, majd a köré írt kör egyenletét felírva a kör és a BC egyenes metszéspontjainak koordinátáit számoljuk ki.