I. megoldás. A megoldás során az alábbi szóhasználattal élünk. Azt mondjuk, hogy a b pozitív egész az a pozitív egészet *felülről dominálja,* ha a osztója b-nek, és *alulról dominálja,* ha $b+1$ osztója $(a+1)$-nek. (Minden pozitív egész tehát felülről és alulról is dominálja önmagát.) A b egész akkor *dominálja* a-t, ha b felülről vagy alulról dominálja a-t. Az X halmaz pedig akkor *dominálja* az Y halmazt, ha Y minden y eleméhez található olyan x az X-ből, amely dominálja y-t. Végül, pozitív egészek egy Z halmazát akkor nevezzük *függetlennek,* ha Z egyetlen eleme sem dominálja Z egy másik elemét. Az imént bevezetett terminológia segítségével a feladat állítása úgy fogalmazható meg, hogy a pozitív egészek minden véges A halmazának van olyan független B részhalmaza, amely dominálja A-t.

Tekintsük az A halmaz mindazon C részhalmazait, melyekre

(a) C független, másfelől

(b) ha A valamely x eleme alulról dominálja C egy elemét, akkor C felülről dominálja x-et.

Létezik a fenti tulajdonságokat teljesítő C halmaz, hisz az üreshalmaz például ilyen. Válasszuk a B halmazt ezen C halmazok közül úgy, hogy B a lehető legtöbb elemét dominálja felülről az A halmazban. Azt állítjuk, hogy egy eképpen választott B halmaz rendelkezik a feladatban előírt tulajdonságokkal. Mivel B-t függetlennek választottuk, ezért csupán azt kell igazolni, hogy B dominálja a teljes A halmazt. Indirekt módon bizonyítunk, tegyük fel, hogy B mégsem dominálja A-t.

Legyen tehát a az A halmaz legkisebb olyan eleme, amit B nem dominál, és legyen $B' := B \setminus D(a) \cup \{a\}$, ahol $D(a)$ az a osztóinak halmazát jelöli. Megmutatjuk, hogy B választásának ellentmondva a B' halmaz amellett, hogy több elemet dominál felülről, mint B, teljesíti az (a) és (b) tulajdonságokat is.

A konstrukcióból adódóan B' az A halmaz minden olyan elemét felülről dominálja, amely elemeket B felülről dominál, és ezen túl B' felülről dominálja a-t is. Ezért B' több elemet dominál felülről, mint B. A B részhalmazaként $B' \setminus \{a\}$ független, továbbá az a választásából adódóan $B' \setminus \{a\}$ nem dominálja a-t. Sőt, a sem dominálja $B' \setminus \{a\}$ egyetlen elemét sem: alulról a B halmaz (b) tulajdonsága miatt, felülről pedig B' definíciójából adódóan. Ezért a B' halmaz csakugyan független.

Végül, a (b) tulajdonság igazolásához indirekt módon tegyük fel, hogy x alulról dominálja B' egy y elemét. Ha mármost $y \in B$, akkor a (b) tulajdonság miatt B felülről dominálja x-et, így B' is, tehát teljesül a (b) tulajdonság. Ha pedig $y \notin B$, akkor $y = a$ és az alulról történő dominálás miatt $x < y$. Mivel a az A halmaz legkisebb olyan eleme, amit B nem dominál, ezért B dominálja x-et. Ha B felülről dominálja x-et, akkor B' is felülről dominálja x-et, a (b) tulajdonság teljesül. Ha pedig B egy z eleme alulról dominálja x-et, akkor mivel x alulról dominálja a-t, z is alulról dominálja a-t. Ez azt jelenti, hogy B mégiscsak dominálja a-t, ellentétben az a választásával. A kapott ellentmondás pedig azt igazolja, hogy B'-re teljesül a (b) tulajdonság, és ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

II. megoldás. Az I. megoldásban bevezetett szóhasználatot tovább bővítjük. Pozitív egészek egy véges H halmaza *tetejének* nevezzük azt a $H^{\uparrow}$ halmazt, melyet H mindazon h elemei alkotnak, amelyet nem dominál felülről a H egyetlen h-tól különböző eleme sem. Hasonlóan, a H halmaz $H^{\downarrow}$-val jelölt *alja* a H azon h elemeiből áll, amelyet a H-nak h-tól különböző eleme nem dominál alulról. Világos, hogy $H^{\uparrow}$ felülről, $H^{\downarrow}$ pedig alulról dominálja H-t, továbbá, hogy H tetejének egyik eleme sem dominálja H tetejének egy másik elemét felülről, illetve H aljának egyetlen eleme sem dominálja H aljának egy másik elemét alulról.

Szükségünk lesz még az alábbi megfigyelésre. Ha egy X halmaz alulról dominálja az Y halmazt, továbbá az Y alulról dominálja Z-t, akkor X is alulról dominálja Z-t. Legyen ugyanis $z \in Z$ tetszőleges. Az Y és Z viszonya folytán létezik olyan $y \in Y$, amelyre $y+1$ osztója $(z+1)$-nek. Mivel X alulról dominálja Y-t, ezért X-nek van olyan x eleme, amelyre $x+1$ osztja $(y+1)$-et. Ám ekkor $x+1$ osztója $(z+1)$-nek is, azaz X alulról dominálja Z minden elemét.

A továbbiakban megadunk egy véges eljárást, amely tetszőleges A halmazhoz talál egy, a feladatban megkívánt tulajdonságokkal rendelkező B részhalmazt. Legyen

$$A_0 := A, \quad B_0 := A_0^{\uparrow} \quad \text{és} \quad X_0 := B_0 \setminus B_0^{\downarrow}.$$

Ha már meghatároztuk az A_i, B_i és X_i halmazokat, akkor legyen

$$A_{i+1} := A_i \setminus X_i, \quad B_{i+1} := A_{i+1}^{\uparrow} \quad \text{és} \quad X_{i+1} := B_{i+1} \setminus B_{i+1}^{\downarrow}.$$

Figyeljük meg, hogy B_{i+1} az A_{i+1} teteje lévén felülről dominálja A_{i+1}-et és a $B_i^{\downarrow}$ alulról dominálja B_i-t, így X_i-t is. Ugyancsak a definícióból adódóan $B_i^{\downarrow} = B_i \setminus X_i \subseteq B_{i+1}$, ezért B_{i+1} alulról dominálja $B_i^{\downarrow}$-t, így a $B_i^{\downarrow}$ által alulról dominált X_i-t is. Világos, hogy $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, így az A halmaz végessége miatt $A_k = A_{k+1}$ teljesül valamely k-ra. Ez azt jelenti, hogy $X_k = \emptyset$, azaz $B_k = B_k^{\downarrow}$. Mivel $B_k^{\uparrow} = \left(A_k^{\uparrow}\right)^{\uparrow} = A_k^{\uparrow} = B_k$, ezért B_k független.

Megmutatjuk, hogy a $B = B_k$ halmaz megfelel a feladat feltételeinek. Láttuk, hogy B_k független, így csupán azt kell bizonyítanunk, hogy A-t is dominálja. Korábban láttuk, hogy B_k az A_k-t felülről dominálja. Elegendő tehát annyit bizonyítani, hogy B_k alulról dominálja az $A \setminus A_k = X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_{k-1}$ halmazt. Láttuk azt is, hogy B_k alulról dominálja az X_{k-1} halmazt. Mivel $B_{k-1} \subseteq B_k \cup X_{k-1}$, ezért B_k a B_{k-1}-et is alulról dominálja. Hasonlóan, B_{k-1} alulról dominálja X_{k-2}-t, így B_{k-2}-t is, tehát B_k is alulról dominálja B_{k-2}-t. Ugyanez az érvelés mutatja, hogy B_k alulról dominálja X_i-t és B_i-t minden $0 \le i \le k$-ra. Mindezt összevetve kapjuk, hogy B_k alulról dominálja az $X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_{k-1}$ halmazt. Ezzel pedig beláttuk, hogy a $B = B_k$ halmaz rendelkezik a feladatban leírt tulajdonsággal. $\square$