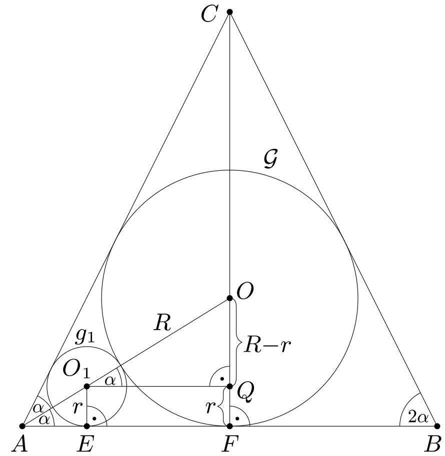
Megoldás. Legyen $\mathcal{K}$ csúcsa C, a $\mathcal{G}$ és a g_i gömbök középpontja pedig O, illetve O_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Vegyük $\mathcal{K}$ metszetét a COO_1 síkkal. Ez egy olyan egyenlőszárú ABC háromszög, mely beírt körének középpontja O és sugara R, továbbá az O_1 középpontú r sugarú kör érinti az AB alapot, az AC szárat és a beírt kört is (*1. ábra*). Legyen az O_1-en átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes és a CO egyenes metszéspontja Q, az O_1Q szakasz hosszát pedig jelöljük d-vel.



1. ábra

Ha $CAB\sphericalangle = 2\alpha$, akkor $OAB\sphericalangle = \alpha$, mert a beírt kör középpontja rajta van a háromszög szögfelezőin. Mivel O_1Q párhuzamos AB-vel, ezért Q és O_1 ugyanolyan távolságra van az AB egyenestől, amiből kapjuk, hogy $OQ = R - r$. Tudjuk, hogy egymást kívülről érintő körök esetén a két körközéppont távolsága megegyezik a körök sugarainak összegével, ezért $OO_1 = R + r$. Az OO_1Q derékszögű háromszögből tehát egyrészt kapjuk, hogy

$$\sin\alpha = \frac{R - r}{R + r},$$

amiből (mivel $\alpha < 90°$, ezért sem itt, sem a későbbiekben nem áll nevezőben 0)

$$R = r \cdot \frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}, \quad \text{azaz} \quad R + r = \frac{2r}{1 - \sin\alpha},$$

majd ezt felhasználva:

$$O_1Q = d = (R + r)\cos\alpha = 2r \cdot \frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}.$$

A kétszeres szögekre vonatkozó trigonometrikus képleteket alkalmazva:

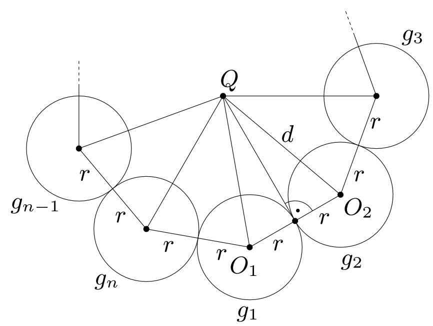
$$\frac{2r}{d} = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = -1 + \frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

A $g_1, g_2, \ldots, g_n$ gömbök középpontjai által alkotott $2r$ oldalú $O_1O_2 \ldots O_n$ szabályos n-szög síkja a kúp alapjával párhuzamos, attól r távolságra lévő sík. Mivel ebben a síkban Q is benne van és a gömbök szimmetrikus elhelyezkedése miatt $QO_i = d$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén teljesül, ezért Q a szabályos sokszög köré írt kör középpontja. Legyen $\varphi = \dfrac{180°}{n}$. Mivel a QO_1O_2 háromszög egyenlőszárú és szárszöge 2φ (*2. ábra*), ezért

$$\sin\varphi = \frac{\frac{O_1O_2}{2}}{O_1Q} = \frac{r}{d} = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right). \tag{1}$$

Az ABC háromszög alapon fekvő szögei 2α nagyságúak, ezért $0° < \alpha < 45°$. Tudjuk, hogy az $x \mapsto \operatorname{tg} x$ függvény a $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ intervallumon szigorúan monoton nő, ezért az $x \mapsto -1 + \dfrac{2}{1 + \operatorname{tg} x}$ függvény ugyanitt szigorúan monoton csökken. Tehát (1)-ből azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\left(-1 + \frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{45°}{2}}\right) < \sin\varphi < \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{2}{1 + \operatorname{tg} 0°}\right) = \frac{1}{2}. \tag{2}$$



2. ábra

A bal oldalon szereplő $\operatorname{tg}\dfrac{45^\circ}{2}$ értéket a *3. ábrán* látható 1 befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszöget felhasználva számoljuk ki. Mivel $AB = BC = 1$, ezért $AC = \sqrt{2}$. Ha az A-ból induló szögfelező a BC oldalt D-ben metszi, akkor egyrészt $BD = \operatorname{tg}\dfrac{45^\circ}{2}$, másrészt a szögfelezőtétel szerint $BD/DC = AB/AC$, ebből pedig a $BD + DC = BC$ összefüggést is figyelembe véve kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\frac{45^\circ}{2} = BD = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

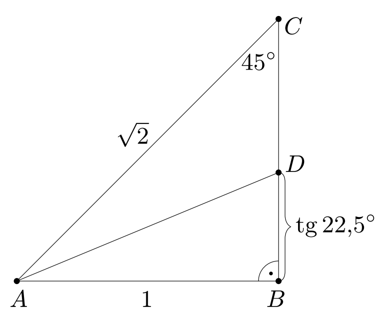
Ezért a (2) egyenlőtlenség bal oldalát átalakítva

$$\sin\varphi > \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{2}{1+\left(\sqrt{2}-1\right)}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \tag{3}$$

adódik. Tudjuk, hogy az $x \mapsto \sin x$ függvény is szigorúan monoton nő a $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, ezért a (2) és (3) egyenlőtlenségekből $\varphi = \dfrac{180^\circ}{n}$-re az alábbi korlátok adódnak:

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}-1}{2} < \frac{180^\circ}{n} < \arcsin\frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad 11{,}95^\circ < \frac{180^\circ}{n} < 30^\circ,$$

vagyis $6 < n < 16$.



3. ábra

Megmutatjuk, hogy az $n = 7, 8, \ldots, 15$ értékekre léteznek is megfelelő kúpok. Az (1) egyenletből mindegyik n értékhez meghatározhatjuk a hozzá tartozó α_n szöget, ami az n-re vonatkozó egyenlőtlenségek miatt 0°-nál nagyobb, de 45°-nál kisebb lesz. Ezután pedig r ismeretében R is, s így a kúp is meghatározható.

Megjegyzés. Könnyen meggondolható, hogy $n = 6$ esetén számolásunkból $R = r$ adódik, azaz ebben az esetben a R sugarú gömb éppen „elfér” a 6 db r sugarú gömb közt, nem magasodik ki közülük, ezért nem kapunk megfelelő kúpot. Ha pedig $n = 16$, akkor a R sugarú gömb „túlnyúlik” a kis gömböket tartalmazó, középpontjaik síkjára merőleges alkotójú legszűkebb egyenes körhengeren, ezért nem kapunk megfelelő kúpot.