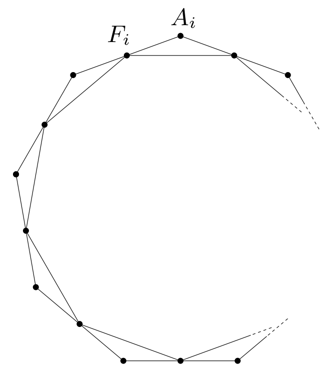
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy az állítás pontosan akkor igaz, ha n 1-nél nagyobb páratlan szám. A konvexségből következik, hogy ha a sokszög csúcsait $A_1, A_2, \ldots, A_n$, az A_iA_{i+1} oldal felezőpontját pedig F_i jelöli ($i = 1, 2, \ldots, n$), akkor $F_1F_2 \ldots F_n$ is konvex n-szög, és az F_iF_{i+1} egyenes által meghatározott két félsík közül A_{i+1} az egyikbe, az $A_1A_2 \ldots A_n$ sokszög összes többi csúcsa pedig a másikba esik.



1. ábra

Ha adottak az oldalfelezőpontok és a sokszög A_1 csúcsa, akkor ezek egyértelműen meghatározzák a sokszöget, mert az adott csúcsot sorban tükrözve az oldalfelezőpontokra megkapjuk az n-szög minden csúcsát. Ebből az is látszik, hogy a csúcs fixpontja annak a transzformációnak, amit az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ pontokra való egymás utáni tükrözések adnak meg. Tudjuk, hogy páratlan sok középpontos tükrözés egymásutánja megegyezik egy középpontos tükrözéssel, páros sok középpontos tükrözés egymásutánja pedig megegyezik egy eltolással (ami az identitás is lehet, ha az eltolás vektora $\mathbf{0}$).

Ha tehát $n \geq 3$ páratlan szám és az $F_1F_2 \ldots F_n$ sokszög szabályos, akkor A_1 csak az a pont lehet, ami az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ pontokra való egymás utáni tükrözések által meghatározott középpontos tükrözés centruma, azaz az A_1 pont egyértelműen létezik. Mivel egy szabályos sokszög oldalfelezőpontjai nyilván szabályos sokszöget határoznak meg, ezért A_1 egyértelműsége azt jelenti, hogy az $A_1A_2 \ldots A_n$ sokszög is szabályos.

Ha viszont $n \geq 4$ páros szám, akkor A_1 bármely olyan pont lehet, ami az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ pontokra való egymás utáni tükrözések által meghatározott eltolásnak fixpontja. Most abból, hogy bármely szabályos sokszög oldalfelezőpontjai szabályos sokszöget határoznak meg, az következik, hogy a felezőpontokra való tükrözések egymásutánja a $\mathbf{0}$ vektorral való eltolás, azaz az identitás. Ennek minden pont fixpontja, tehát a sík tetszőleges T pontját sorban tükrözve a felezőpontokra, az n-edik tükrözés után visszajutunk a T pontba. Ha T-t úgy választjuk, hogy elég közel legyen annak a szabályos sokszögnek egy csúcsához, melynek oldalfelezőpontjai az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ pontok, akkor a tükrözések során kapott sokszög nyilván konvex lesz, de nem szabályos.

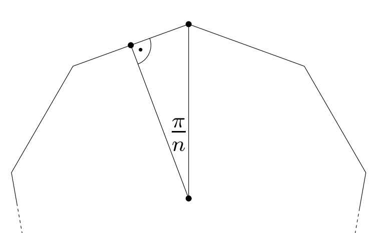
Ezzel állításunkat beláttuk.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, továbbá legyenek egy rögzített O pontból a szereplő pontokba mutató helyvektorok a megfelelő kövér kisbetűkkel jelölve. Tudjuk, hogy bármely szakasz felezőpontjának helyvektora megegyezik a végpontok helyvektorainak számtani közepével. Ezért

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2}, \\
\mathbf{f}_2 &= \frac{\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3}{2}, \\
&\vdots \\
\mathbf{f}_{n-1} &= \frac{\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n}{2}, \\
\mathbf{f}_n &= \frac{\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_1}{2}.
\end{aligned}$$

Minden második egyenletet (-1)-gyel megszorozva, majd az egyenleteket összeadva kapjuk, hogy

$$\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\mathbf{f}_n = \begin{cases} \mathbf{a}_1, & \text{ha } n \text{ páratlan}, \\ \mathbf{0}, & \text{ha } n \text{ páros}. \end{cases} \tag{1}$$



2. ábra

Ez azt jelenti, hogy ha $n \geq 3$ páratlan, akkor a felezőpontok egyértelműen meghatározzák a csúcspontokat. Mivel egy szabályos n-szög oldalfelezőpontjai szabályos n-szöget alkotnak (hiszen az oldalfelezőpontok által meghatározott sokszöget megkapjuk, ha az eredeti sokszöget a középpontja körül $\frac{\pi}{n}$ szöggel elforgatjuk és a középpontból $\cos\frac{\pi}{n}$ arányban kicsinyítjük, lásd a *2. ábrát*), ezért ebben az esetben az eredeti sokszög szabályossága következik a felezőpontok által meghatározott sokszög szabályosságából. Ha $n \geq 4$ páros, akkor viszont az (1) egyenlet szerint a felezőpontoknak eleget kell tenniük bizonyos feltételeknek (ha pl. $n = 4$, akkor könnyen látható, hogy (1) éppen azt a jól ismert tulajdonságot jelenti, mely szerint tetszőleges négyszög oldalfelezőpontjai paralelogrammát alkotnak), de a felezőpontok nem határozzák meg a csúcsokat. Ha ugyanis $\mathbf{b}_1$ egy tetszőleges pont helyvektora és $i = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén $\mathbf{b}_{i+1} = 2\mathbf{f}_i - \mathbf{b}_i$, akkor

$$\mathbf{b}_i = 2\big(\mathbf{f}_{i-1} - \mathbf{f}_{i-2} + \cdots + (-1)^i \mathbf{f}_1\big) + (-1)^{i+1}\mathbf{b}_1.$$

Ezért $i < n$ esetén a B_iB_{i+1} szakasz felezőpontja nyilván F_i, az pedig, hogy B_nB_1 felezőpontja F_n, az (1) egyenletből következik, mert azt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_n &= 2\big(\mathbf{f}_{n-1} - \mathbf{f}_{n-2} + \cdots + (-1)^n \mathbf{f}_1\big) + (-1)^{n+1}\mathbf{b}_1 = \\ &= 2\big((\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_n) + \mathbf{f}_{n-1} - \mathbf{f}_{n-2} + \cdots + \mathbf{f}_1\big) - \mathbf{b}_1 = \\ &= 2\mathbf{f}_n - 2 \cdot \mathbf{0} - \mathbf{b}_1 = 2\mathbf{f}_n - \mathbf{b}_1.\end{aligned}$$

Ha B_1-et úgy választjuk, hogy elég közel legyen A_1-hez, akkor a $B_1B_2 \ldots B_n$ sokszög nyilván konvex lesz. Tehát ha n páros, akkor végtelen sok olyan nem szabályos konvex n-szög létezik, melyek oldalfelezőpontjai szabályos n-szöget alkotnak.

Vagyis a feladatban szereplő állítás akkor igaz, ha n 1-nél nagyobb páratlan szám.