I. megoldás. A p_1 és a p_3 parabola metszéspontjának kiszámításához vonjuk ki p_3 egyenletéből p_1 egyenletét:

$$0 = 2x^2 + (b_3 - b_1)x + (c_3 - c_1).$$

Ebből

$$x_{1,2} = \frac{-(b_3 - b_1) \pm \sqrt{(b_3 - b_1)^2 - 8(c_3 - c_1)}}{4}.$$

A két parabola akkor érinti egymást, ha itt 0 a diszkrimináns, vagyis

$$(b_3 - b_1)^2 = 8(c_3 - c_1). \tag{1}$$

A metszéspont koordinátái ekkor:

$$x_1 = \frac{(b_1 - b_3)}{4},$$
$$y_1 = \left(\frac{(b_1 - b_3)}{4}\right)^2 + b_3\frac{(b_1 - b_3)}{4} + c_3.$$

Hasonlóan a p_2 és a p_3 parabola esetében:

$$(b_3 - b_2)^2 = 8(c_3 - c_2), \tag{2}$$
$$x_2 = \frac{(b_2 - b_3)}{4},$$
$$y_2 = \left(\frac{(b_2 - b_3)}{4}\right)^2 + b_3\frac{(b_2 - b_3)}{4} + c_3.$$

A két metszéspontot összekötő egyenes meredeksége:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\left(\frac{(b_2 - b_3)}{4}\right)^2 + b_3\frac{(b_2 - b_3)}{4} + c_3 - \left(\frac{(b_1 - b_3)}{4}\right)^2 - b_3\frac{(b_1 - b_3)}{4} - c_3}{\frac{(b_2 - b_3)}{4} - \frac{(b_1 - b_3)}{4}} =$$
$$= \frac{\left(\frac{b_2 - b_3}{4}\right)^2 - \left(\frac{b_1 - b_3}{4}\right)^2 + b_3\left(\frac{b_2 - b_1}{4}\right)}{\frac{b_2 - b_1}{4}} = \frac{\frac{(b_2 - b_3)^2}{2} - \frac{(b_1 - b_3)^2}{2} + 2b_3(b_2 - b_1)}{2(b_2 - b_1)}.$$

Az (1)-es és a (2) egyenlet felhasználásával ebből

$$m = \frac{4(c_1 - c_2) - 2b_3(b_1 - b_2)}{2(b_2 - b_1)}$$

következik.

A két parabolát egyszerre érintő egyenes egyenlete legyen $y = b_0x + c_0$. Ennek az egyenesnek akkor lesz egy közös pontja a parabolákkal, ha

$$(b_0 - b_1)^2 = 4(c_0 - c_1),$$
$$(b_0 - b_2)^2 = 4(c_0 - c_2).$$

Ebből:

$$b_0 = \frac{-4(c_1 - c_2) - \left(b_1^2 - b_2^2\right)}{2(b_2 - b_1)}.$$

Az (1)-es egyenletből kivonva a (2)-est:

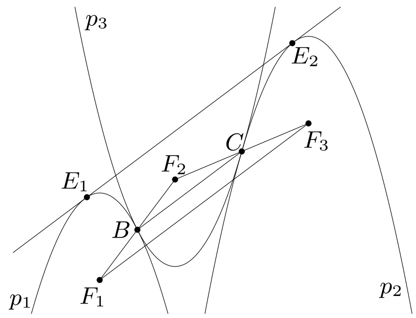
$$b_1^2 - b_2^2 = -8(c_1 - c_2) + 2b_3(b_1 - b_2).$$

Ebből:

$$b_0 = \frac{-4(c_1 - c_2) + 8(c_1 - c_2) - 2b_3(b_1 - b_2)}{2(b_2 - b_1)} = \frac{4(c_1 - c_2) - 2b_3(b_1 - b_2)}{2(b_2 - b_1)}.$$

Tehát $m = b_0$. Ezt kellett bizonyítani.

II. megoldás. Mivel a főegyütthatók megegyeznek vagy egymás ellentettjei, a három parabola egybevágó, és a vezéregyenesük párhuzamos az x tengellyel. Az egymást érintő parabolák egymás középpontos tükörképei, ha a főegyütthatóik egymás ellentettjei. Ha ugyanis egy parabolát egy P pontjára tükrözünk, akkor egy őt érintő parabolát kapunk: ha P-n kívül lenne más közös pontjuk, akkor annak a tükörképe is közös pont lenne, de három közös pontja nem lehet két különböző, függőleges tengelyű parabolának. Ha pedig az egyik parabola fókuszpontját az y tengellyel párhuzamosan mozgatni kezdjük, akkor már nyilván nem lehet érintő.



Jelölje rendre B és C azt a két pontot, amiben p_1, illetve p_2 érinti p_3-at. A p_1-et és p_2-t úgy kaphatjuk meg, hogy p_3-at a B, illetve C érintési pontra tükrözzük. Ebből következik, hogy a p_1 parabolának a $2\overrightarrow{BC}$ vektorral való eltoltja p_2. Ezért a p_i parabolák F_i fókuszaira is $\overrightarrow{F_1F_2} = 2\overrightarrow{BC}$ teljesül. Jelölje végül p_1 és p_2 közös érintőjének e két parabolával vett érintési pontjait rendre E_1 és E_2. Ha az E_1E_2 egyenest eltoljuk $\overrightarrow{F_1F_2}$-vel, akkor a p_2-nek egy E_1E_2-vel párhuzamos érintőjét kapjuk. Mivel egy parabolának nincs két, egymással párhuzamos érintője, azért e két érintő egybeesik, azaz E_1E_2 párhuzamos F_1F_2-vel, az pedig párhuzamos az $F_1F_2F_3$ háromszög F_1F_2 oldalához tartozó középvonallal, BC-vel.