I. megoldás.[1]

A szimmetria miatt a B és D csúcsok esetében a keresett valószínűség ugyanakkora, ezt a közös értéket jelölje p, a C csúcs esetén pedig a valószínűség legyen q. Könnyen belátható, hogy a bolha 1 valószínűséggel előbb-utóbb minden csúcsra eljut, és így $2p+q=1$. Ugyanis 3 egymást követő ugrás során $1/4$ valószínűséggel végig egyforma irányba megy – és ily módon minden csúcsot meglátogat –, ezért annak a valószínűsége, hogy $3k$ ugrás után még nem járt mindenhol, legfeljebb $(3/4)^k$, ami tart a 0-hoz, ha $k \to \infty$.

Most megmutatjuk, hogy $p=q$, ehhez annak a valószínűségét vizsgáljuk meg, hogy C lesz az utolsóként meglátogatott csúcs. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy az első ugrás után B-ben van. Azt kell meghatároznunk, mekkora valószínűséggel jut el innen előbb D-be, mint C-be. Ha D-be még C előtt jut el, akkor közben A-ban is járnia kell, vagyis pont azok az ugrás-sorozatok teljesítik a feltételt, amelyeknél a B-ből induló ugrás-sorozat során C-be, vagyis egy szomszédos csúcsba jut el utoljára. A szimmetria miatt ennek a valószínűsége p, ezért valóban $q=p$.

Tehát $p=q=1/3$, vagyis a keresett valószínűség mindhárom csúcs esetén $1/3$.

II. megoldás. Annak az esélye, hogy B lesz az utolsó, ugyanannyi, mint annak, hogy D, mivel a négyzet szimmetrikus az AC átlóra.

Nézzük, mennyi annak az esélye, hogy a D csúcs az utolsó. Ehhez az szükséges, hogy először a B-re lépjen, azután pedig ugráljon az A és a B között, majd egyszer lépjen C-re. Ekkor biztos, hogy a D csúcs lesz az utolsó (ha feltehetjük, hogy egyszer véget ér az ugrálás – ennek bizonyítását lásd az I. megoldásban). Tehát a lehetséges utak így néznek ki: $A-B-C-\ldots$, $A-B-A-B-C-\ldots$, $A-B-A-B-A-B-C-\ldots$, $\ldots$. Ezek valószínűsége rendre:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4=\left(\frac{1}{4}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6=\left(\frac{1}{4}\right)^3,$$

majd ugyanúgy mindegyik az előzőnek az $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$-szerese. Ezen valószínűségek összege:

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{4}-1}.$$

Mivel $n\to\infty$ esetén $\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0$, ezért a valószínűségek összegének határértéke $n\to\infty$ esetén

$$\frac{\frac{1}{4}\cdot(0-1)}{\frac{1}{4}-1}=\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}.$$

Ugyanígy $\frac{1}{3}$ annak a valószínűsége, hogy a B csúcs az utolsó. Így a C csúcsra jutó valószínűség $P_C=1-P_B-P_D=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

Megjegyzés. Néhányan egyenletet írtak fel pl. P_D-re. Ha a bolha az A csúcsból a D-re ugrik, akkor biztosan nem a D az utolsó. Ha a B-re ugrik és utána a C-re, akkor már biztosan a D az utolsó. Ha a B után visszaugrik az A-ra, akkor onnantól számítva ismét P_D a valószínűség. Ezt összeadva:

$$P_D=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot P_D,$$

amiből

$$\frac{3}{4}P_D=\frac{1}{4} \quad \text{és így} \quad P_D=\frac{1}{3}$$

következik.

[1] A www.komal.hu oldalon található megoldás. A feladatok megoldása általában pár nappal a határidő után honlapunkon megtalálható.