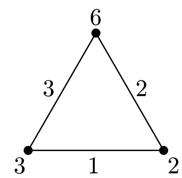
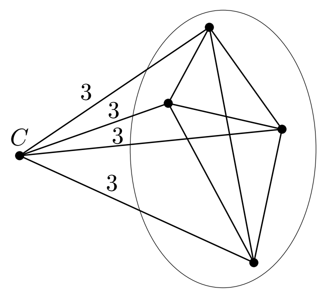
Megoldás. Az állítást a csúcsok száma szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 3$, akkor írjunk a gráf három élére 1-et, 2-t és 3-at (*1. ábra*), ekkor az egyes csúcsokba befutó élekre írt számok szorzata rendre 2, 3 és 6.



1. ábra

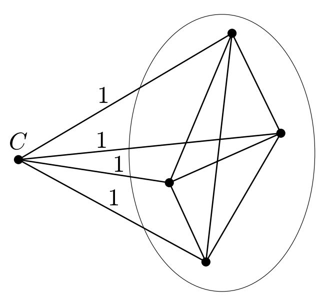
Tegyük fel, hogy az m csúcsú teljes gráf éleire tudunk a feltételeknek megfelelően számokat írni és tekintsük az $m+1$ csúcsú K_{m+1} teljes gráfot. Válasszuk ki K_{m+1}-nek egy m csúcsú teljes K_m részgráfját és ennek éleire írjunk számokat úgy, hogy minden csúcsban különböző legyen az oda befutó élekre írt számok szorzata. Legyen C a K_{m+1}-nek az a csúcsa, mely nincs benne K_m-ben. A C-ből induló élekre a következő módon írjuk a számokat:

i) Ha K_m-ben nincs olyan csúcs, melyhez a 3^{m-1} szorzat tartozik (azaz bármely csúcshoz van olyan abba befutó él, melyre nem a 3-as szám van írva), akkor mind az m darab C-ből kiinduló élre írjunk 3-ast (*2. ábra*). Ekkor K_{m+1}-ben a C-hez tartozó szorzat 3^m, a K_m csúcsaihoz tartozó szorzatok közül pedig mindegyik kisebb, mint 3^m, és közülük semelyik kettő sem egyezik meg, mert a csúcsokhoz K_m-ben különböző szorzatok tartoztak és a C-ből induló élekre írt számok beszámításával mindegyik szorzat 3-szorosára nőtt.



2. ábra

ii) Ha K_m-ben van olyan csúcs, melyhez a 3^{m-1} szorzat tartozik (azaz az összes, abban a csúcsban talalkozó élre a 3-as szám van írva), akkor mind a k darab C-ből kiinduló élre írjunk 1-est (*3. ábra*). Ekkor K_{m+1}-ben a C-hez tartozó szorzat 1, a K_m csúcsaihoz tartozó szorzatok közül pedig mindegyik legalább 3, és közülük semelyik kettő sem egyezik meg, mert a csúcsokhoz K_m-ben különböző szorzatok tartoztak és a C-ből induló élekre írt számok beszámításával a szorzatok nem változtak.



3. ábra

Tehát az állítás igaz $(m+1)$-re is, s így minden természetes számra is.

Megjegyzés. Eljárásunkból következik, hogy minden m esetén a gráfnak csak egyetlen élére írunk 2-t, az összes többi élre 1-et vagy 3-at. Adódik a kérdés, hogy nem lehet-e bizonyos m értékek esetén csak két különböző számot az élekre írva elérni, hogy minden csúcsban különböző legyen az oda befutó élekre írt számok szorzata? A válasz nem, s könnyű meggondolni, hogy ez következik abból az ismert tételből, mely szerint bármely véges, egyszerű gráfnak van két azonos fokszámú csúcsa.