Nagy Kartal megoldása. Első lépésként belátjuk, hogy $k > 2015$. Ha kevesebb, mint 2016 lineáris faktort törölnénk ki, akkor lesz egy lineáris faktor ami mindként oldalon fog szerepelni. Legyen ez az $(x-i)$ lineáris faktor. Ekkor i gyöke lesz az egyenletnek, hiszen ekkor mindkét oldal 0 lenne.

Most pedig megmutatjuk, hogy $k=2016$-ra van megoldás. Legyen ez az egyenlet:

$$(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)(x-9)\cdots(x-2013)(x-2016) =$$
$$= (x-2)(x-3)(x-6)(x-7)\cdots(x-2011)(x-2014)(x-2015).$$

Most nézzük a két oldalt mint két függvényt. Legyen a bal oldal $g(x)$, a jobb oldal $f(x)$. Azt fogjuk belátni, hogy minden x-re $f(x) > g(x)$. Ezt esetenként vizsgáljuk.

1. Ha $x < 1$, akkor mindkét oldal pozitív lesz, így elég azt nézni, hogy $f(x)$ abszolút értéke nagy lesz $g(x)$-nek. Bontsuk részekre a függvényeket és hasonlítsuk azok alapján össze:

$$\left|\big(x-(4m+1)\big)\big(x-(4m+4)\big)\right| < \left|\big(x-(4m+2)\big)\big(x-(4m+3)\big)\right|.$$

Ezt átírhatjuk erre az alakra: $Y(3+Y) < (1+Y)(2+Y)$. A kibontás után látszik, hogy a jobb oldal valóban nagyobb, vagyis $g(x)$ tagjai párosíthatók $f(x)$ tagjaival úgy, hogy mindig az $f(x)$-es tag legyen a nagyobb. Vagyis ezen az intervallumon $f(x) > g(x)$.

2. Ha $x > 2016$, akkor hasonló módon végigvihető, hogy $f(x) > g(x)$.

3. Ha $1 \le x \le 2016$.

a) Ha x egész és $4m$ vagy $4m+1$ alakú, akkor $g(x) = 0$, $f(x) > 0$.

b) Ha x egész és $4m+2$ vagy $4m+3$ alakú, akkor $g(x) < 0$, $f(x) = 0$.

c) Ha $2m > x > 2m-1$, akkor $g(x)$ negatív, $f(x)$ pozitív.

d) Ha $4m < x < 4m+1$, akkor mindkét függvény pozitív. Vagyis az kell, hogy $\big|f(x)\big| > \big|g(x)\big|$. Itt is bontsuk részekre a függvényeket:

$$f_1(x) = (x-2)(x-3), \qquad f_2(x) = (x-6)(x-7), \qquad \ldots,$$
$$g_1(x) = (x-1)(x-4), \qquad g_2(x) = (x-5)(x-8), \qquad \ldots.$$

Itt is könnyen belátható, hogy $f_i(x) > g_i(x)$. Vagyis itt is igaz, hogy $f(x) > g(x)$.

e) Ha $4m+2 < x < 4m+3$, akkor mindkét függvény negatív, ezért azt kell belátni, hogy $\big|f(x)\big| < \big|g(x)\big|$. A részekre bontás itt így fog kinézni:

$$f_1(x) = (x-2), \quad f_2(x) = (x-3)(x-6), \quad \ldots,$$
$$f_{1008}(x) = (x-2011)(x-2014), \quad f_{1009}(x) = (x-2015),$$
$$g_1(x) = (x-1), \quad g_2(x) = (x-4)(x-5), \quad \ldots,$$
$$g_{1008}(x) = (x-2012)(x-2013), \quad g_{1009}(x) = (x-2016).$$

Itt könnyen belátható, hogy $f_i(x) < g_i(x)$. Vagyis igaz, hogy $\big|g(x)\big| > \big|f(x)\big|$, azaz $f(x) > g(x)$.

Ezzel beláttuk, hogy a jobb oldal mindig nagyobb, mint a bal oldal, azaz nem lesz gyöke az egyenletnek.

A megoldás: $k = 2016$.