Baran Zsuzsanna megoldása. Be fogjuk látni, hogy a legkisebb ilyen b pozitív egész a $b=6$.

A feladat az, hogy minél kevesebb szomszédos pozitív egész számot kell találnunk úgy, hogy azok közül mindegyik P-jének legyen közös prímosztója valamelyik másik elem P-jével. Ehhez megvizsgáljuk, hogy közeli számok P-jeinek milyen közös prímosztója lehet, azaz hogy adott kicsi pozitív egész x-ekre milyen p prímre lehet $p \mid P(n)$ és $p \mid P(n+x)$ (n pozitív egész). Az $x=1$, 2, 3 és 4-et fogjuk megvizsgálni.

Először is, mivel $n^2+n=n(n+1)$ páros, ezért $P(n)$ mindig páratlan, így p nem lehet 2.

$x=1$-re:

$$\begin{aligned}\left(n^2+n+1;(n+1)^2+(n+1)+1\right)&=\left(n^2+n+1;2n+2\right)=\\&=\left(n^2+n+1;n+1\right)=\left(n^2;n+1\right)=1.\end{aligned}$$

Azaz $P(n)$-nek és $P(n+1)$-nek nem lehet közös prímosztója.

$x=2$-re:

$$\begin{aligned}0&\equiv n^2+n+1\equiv(n+2)^2+(n+2)+1=n^2+5n+7 \pmod p,\\0&\equiv 4n+6 \pmod p,\\2n&\equiv -3 \pmod p,\\0&\equiv 4n^2+4n+4\equiv(-3)^2+2(-3)+4=7 \pmod p.\end{aligned}$$

Így csak akkor lehetséges $p \mid P(n)$ és $p \mid P(n+2)$, ha $p=7$ és $2n\equiv -3\equiv 4 \pmod 7$, így $n\equiv 2 \pmod 7$. Ilyenkor tényleg fennáll az oszthatóság: $2^2+2+1\equiv 4^2+4+1\equiv 0 \pmod 7$.

$x=3$-ra:

$$\begin{aligned}0&\equiv n^2+n+1\equiv(n+3)^2+(n+3)+1=n^2+7n+13 \pmod p,\\0&\equiv 6n+12 \pmod p,\\3n&\equiv -6 \pmod p,\\0&\equiv 9n^2+9n+9\equiv(-6)^2+3\cdot(-6)+9=27 \pmod p.\end{aligned}$$

Így csak a $p=3$ jöhet szóba.

Ekkor $1^2+1+1\equiv 0 \pmod 3$, de $0^3+0+1\equiv 2^2+2+1\not\equiv 0 \pmod 3$, így az $n\equiv 1 \pmod 3$ jó, de más nem. Tehát $P(n)$ és $P(n+3)$ közös prímosztója csak a 3 lehet, mégpedig ha $n\equiv 1 \pmod 3$.

$x=4$-re:

$$\begin{aligned}0&\equiv n^2+n+1\equiv(n+4)^2+(n+4)+1=n^2+9n+21 \pmod p,\\0&\equiv 8n+20 \pmod p,\\2n&\equiv -5 \pmod p,\\0&\equiv 4n^2+4n+4\equiv(-5)^2+2\cdot(-5)+4=19 \pmod p.\end{aligned}$$

Így csak a $p=19$, $2n\equiv -5\equiv 14 \pmod{19}$, azaz $n\equiv 7 \pmod{19}$ jöhet szóba. Ez megfelelő is: $7^2+7+1\equiv 9^2+9+1\equiv 0 \pmod{19}$. Tehát $P(n)$ és $P(n+4)$ közös prímosztója csak a 19 lehet, mégpedig ha $n\equiv 7 \pmod{19}$.

Most az eddigiek alapján próbáljunk létrehozni egy megfelelő 6 elemű halmazt. Szeretnénk egy olyan a-t találni, hogy $P(a+1)$-nek és $P(a+5)$-nek, $P(a+2)$-nek és $P(a+4)$-nek, illetve $P(a+3)$-nak és $P(a+6)$-nak legyen közös prímosztója.

Legyen $b=6$ és $a\equiv 1 \pmod 3$, $a\equiv 6 \pmod{19}$ és $a\equiv 0 \pmod 7$ (ennek a kínai maradéktétel szerint van pozitív egész megoldása).

Ekkor $a+1\equiv 7 \pmod{19}$, így $19 \mid P(a+1), P(a+1+4)$, míg $a+2\equiv 2 \pmod 7$, így $7 \mid P(a+2), P(a+2+2)$, végül $a+3\equiv a+6\equiv 1 \pmod 3$, így $3 \mid P(a+3), P(a+6)$.

Így a fenti a mellett a $\left\{P(a+1),P(a+2),\ldots,P(a+6)\right\}$ halmaz mindegyik eleméhez található egy másik elem, amivel van közös prímosztója, azaz a halmaz illatos.

Tegyük fel, hogy van kisebb megfelelő b is, azaz létezik $b\le 5$ pozitív egész, amihez létezik a pozitív egész, hogy $\left\{P(a+1),\ldots,P(a+b)\right\}$ illatos.

Nem lehet $b=2$ vagy $b=3$, mert $P(a+2)$ relatív prím $P(a+1)$-hez és $P(a+3)$-hoz is.

Nem lehet $b=4$, mert akkor $P(a+2)$ relatív prím $P(a+1)$-hez és $P(a+3)$-hoz, így $P(a+4)$-gyel kell közös prímosztója legyen, ami csak a 7 lehet ($P(n)$ és $P(n+2)$ közös prímosztója csak a 7 lehet). Hasonlóan $P(a+3)$-nak $P(a+1)$-gyel kell közös prímosztója legyen, de ez is csak a 7 lehet. Ez viszont azt jelentené, hogy $P(a+1)$ és $P(a+2)$ egyaránt oszthatóak 7-tel, ami ellentmondás.

Nem lehet $b=5$ sem, mert akkor $P(a+3)$ relatív prím a szomszédjaihoz, így $P(a+1)$-gyel vagy $P(a+5)$-tel kell közös prímosztója legyen, ez a prímosztó pedig csak a 7 lehet. Ha $7 \mid P(a+3)$, akkor $7\nmid P(a+2), P(a+4)$. Eközben $P(a+2)$ relatív prím a szomszédjaihoz és mivel nem osztható 7-tel, ezért relatív prím $P(a+4)$-hez is. Ekkor $P(a+5)$-tel kell közös prímosztója legyen, ami viszont csak a 3 lehet ($P(n)$ és $P(n+3)$ közös prímosztója csak a 3 lehet).

Hasonlóan $P(a+4)$-nek $P(a+1)$-gyel kell közös prímosztója legyen, ami viszont szintén csak a 7 lehet. Ekkor azonban $7 \mid P(a+1)$ és $7 \mid P(a+2)$, ami ellentmondás.

Tehát mégsem lehet $b \leq 5$, a legkisebb megfelelő b szám a $b = 6$.