Megoldás. *a*) Az ilyen permutációk esetén egy bizonyos számig a sorozat monoton növekvő, utána egy csökkenés, majd ismét monoton növekvő rész következik.

Osszuk két halmazba a számokat, legyenek ezek az x és az y halmazok. Rendezzük x-et és y-t is növekvő sorrendbe, végül írjuk le x, majd y elemeit egymás után.

A számok két halmazba való rendezését (2^n)-féleképpen tehetjük meg. Ezek közül azok az elrendezések nem teljesítik a feltételt, melyek végig monoton növekedőek. Ez vagy akkor van így, ha az egyik halmaz üres halmaz, vagy pedig akkor, ha x legnagyobb eleme kisebb, mint y legkisebb eleme, vagyis ahol x minden eleme kisebb y összes eleménél. (A halmazokon belül biztos nem lesz balra mutató reláció, mert azokat rendeztük.) Ekkor x-be 1-től k-ig kerülnek a számok, y-ba pedig $(k+1)$-től n-ig, ahol k legkisebb értéke 1, legnagyobb értéke pedig $n-1$. Ez $n-1$ lehetőséget jelent. (Egyszerűbben is ki lehet számolni, hiszen az 1-től n-ig terjedő számokat sorban egymás után írva, előttük-köztük-mögöttük összesen $n+1$ hely van, amiből 1-et kell kiválasztani. Ha pl. az előtte levőt választjuk, akkor az x üres halmaz lesz.)

Minden ilyen rendezésnek megfeleltethető egy jó permutáció és viszont.

Tehát $2^n-2-(n-1)=2^n-n-1$ a jó permutációk száma.

b) Ebben az esetben osszuk három halmazba a számokat, x-be, y-ba és z-be, majd a halmazokon belüli rendezés után írjuk le egymás után x, y, végül z elemeit. A három halmazt 3^n-féleképpen hozhatjuk létre.

Ebből le kell vonni a rossz elrendezéseket, vagyis azokat, amikor 0 vagy 1 balra mutató reláció van a permutációban. (Ha x, y vagy z üres halmaz, akkor is 0 vagy 1 a balra mutató relációk száma.)

Ez akkor fordulhat elő, ha x-ben minden elem kisebb y minden eleménél, vagy ha y minden eleme kisebb z elemeinél. Mindkét eset tekinthető úgy, mintha a számokat két halmazba rendeznénk, az $A=x\cup y$ és a $B=z$, illetve az $A=x$ és a $B=y\cup z$ halmazba. Az elemeket az A és a B halmazba 2^n-féleképp helyezhetjük el, majd $n+1$ helyen húzhatjuk meg a „belső" halmazok határát. Tehát 3^n-ből le kell vonnunk $2^n(n+1)$-et. Azonban kétszer vontuk le azokat az eseteket, amikor egyszerre teljesül, hogy x-ben minden elem kisebb y minden eleménél, és y minden eleme kisebb z elemeinél. Vagyis ezeknek számát egyszer hozzá kell adni. Ebben az esetben $n+1$ helyből kell kettőt kiválasztani, ami $\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$ eset. Így a megoldás:

$$3^n-2^n(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}.$$

Megjegyzések. 1. A feladat kapcsolódik az **A. 671.** feladathoz.

2. A megoldásban többen hivatkoztak egy tételre, amiből egy sorban kijött a megoldás. Az eddigi Versenykiírás alapján ezt elfogadtuk, azonban a 2016–2017-es tanévtől ez módosul.