Megoldás. A jobb áttekinthetőség érdekében legyen $2^x = a$, $3^x = b$ és $5^x = c$. Ezekkel a jelölésekkel a megoldandó egyenlet:

$$a^3 + b^3 + 2abc + ab^3 + a^2bc = a^2b + ab^2 + a^2c + a^3b + b^2c + ab^2c.$$

A jobb oldalt nullára rendezzük és a tagok átcsoportosítása után szorzattá alakítjuk a bal oldalt:

$$a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 - a^2c + 2abc - b^2c + ab^3 - a^3b + a^2bc - ab^2c = 0,$$
$$a^2(a-b) - b^2(a-b) - c(a-b)^2 - ab(a-b)(a+b) + abc(a-b) = 0.$$

Most kiemelhető az $(a-b)$, és folytatható a tagok csoportosítása:

$$(a-b)\big(a^2 - b^2 - c(a-b) - ab(a+b) + abc\big) = 0,$$
$$(a-b)\big[(a-b)(a+b-c) - ab(a+b-c)\big] = 0,$$
$$(a-b)(a+b-c)(a-b-ab) = 0.$$

Visszatérve a betűk eredeti jelentéséhez és felhasználva, hogy egy szorzat akkor és csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, a következő eseteket kell megvizsgálni:

i)

$$2^x - 3^x = 0 \iff \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \quad (\text{mivel } 2^x \neq 0).$$

Tudjuk, hogy az $x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$ függvény szigorúan monoton növekedő, így pontosan egyszer veszi fel az 1 értéket, $x = 0$ esetén.

ii)

$$2^x + 3^x - 5^x = 0 \iff \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1 \quad (\text{mivel } 5^x \neq 0).$$

Az $x \mapsto \left(\frac{2}{5}\right)^x$ és $x \mapsto \left(\frac{3}{5}\right)^x$ függvények szigorúan monoton csökkenőek. Emiatt az összegük, az $x \mapsto \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$ függvény is szigorúan monoton csökkenő, így egyszer veheti fel az 1 értéket, $x = 1$ esetén pedig éppen 1-et vesz fel. Ez a második megoldása az egyenletnek.

iii)

$$2^x - 3^x - 2^x \cdot 3^x = 0 \iff \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 2^x \quad (\text{mivel } 2^x \neq 0).$$

Tudjuk, hogy az $x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1$ függvény szigorúan monoton csökkenő, az $x \mapsto 2^x$ függvény szigorúan monoton növekedő, tehát ennek az egyenletnek csak egy megoldása lehet, az $x = -1$ pedig megoldás.

Az egyenletnek három megoldása van, $x = 0$, $x = 1$ és $x = -1$.

Megjegyzés. A legtöbben eljutottak odáig, hogy $2^x = 3^x$, $2^x + 3^x = 5^x$ és $2^x = 3^x + 6^x$ valamelyikének teljesülnie kell. Sokan azonban ezeknél az egyenleteknél csupán a megoldást közölték, és nem indokolták meg, más megoldás miért nem lehet – ez egy pont levonását eredményezte. Szintén egy pont levonást jelentett, ha valaki a két oldalt x függvényeként ábrázolta, és az ábráról leolvasta, hogy csak egy megoldás lehet – ez sejtésnek jó lehet, de bizonyításnak kevés.