Szabó Barnabás megoldása.

Lemma. *Ha x és y egészek, akkor $x^2 \mid y^2$ esetén $x \mid y$.*

Bizonyítás. $x \nmid y$ esetén létezik egy q prím és r nemnegatív egész, melyekre $q^r \mid x$ de $q^r \nmid y$, ekkor viszont $q^{2r} \mid x^2$ és $q^{2r} \nmid y^2$, tehát $x^2 \mid y^2$ nem teljesülhetne.

A feladat állítását k-ra vonatkozó teljes indukcióval fogjuk belátni.

$k=3$ esetén feltehető, hogy az A_1, A_2 és A_3 csúcsok koordinátái rendre $(0,0)$, (a_1,b_1) és (a_2,b_2) (ahol a_i, b_i egészek). Tudjuk, hogy $n \mid a_1^2+b_1^2$ és $n \mid a_2^2+b_2^2$, továbbá $n \mid (a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2 = \left(a_1^2+b_1^2\right)+\left(a_2^2+b_2^2\right)-2(a_1a_2+b_1b_2)$, mivel n páratlan, így $n \mid a_1a_2+b_1b_2$. Innen $n^2 \mid \left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)-(a_1a_2+b_1b_2)^2 = (a_1b_2-a_2b_1)^2$. Ebből $n \mid a_1b_2-a_2b_1$ következik. A jól ismert területképlet alapján

$$2S = |a_1b_2-a_2b_1|, \quad \text{azaz} \quad n \mid 2S,$$

és ezt kellett belátni.

Nyilvánvalóan elegendő az állítást prímhatvány n-re belátni (ha $x \mid 2S$ és $y \mid 2S$, ahol $(x,y)=1$, akkor $xy \mid 2S$). Legyen $n=p^\alpha$, $p>2$. Esetünkben $k \ge 4$ és tegyük fel, hogy az állítást minden k-nál kisebb (de legalább 3) pozitív egészre beláttuk. Találni fogunk egy átlót, amely hosszának négyzete osztható n-nel, így ezen átló mentén félbevágva P-t két kisebb oldalszámú sokszöget kapunk, P_1-et (területe S_1) és P_2-t (területe S_2), amelyekre teljesül a feladat feltétele. Az indukciós feltevés miatt $n \mid 2S_1+2S_2=2S$, azaz készen lennénk a feladattal. Tehát már csak egy megfelelő átlót kell találnunk. P rácssokszög, így a Pitagorasz-tétel alapján P minden átlójának négyzete egész szám. Vegyük az átlók közül azt (vagy az egyiket néhány közül), amelyik hosszának négyzetében p kitevője minimális. Legyen ez az AC átló. Az A-val szomszédos csúcsok B és D. Legyen az AB, BC, CD, DA, AC és BD szakaszok hossza rendre a, b, c, d, e, f. Az $ABCD$ húrnégyszögre a Ptolemaiosz-tételt felírva kapjuk, hogy

$$ac+bd=ef, \tag{1}$$

ezt négyzetre emelve

$$a^2c^2+b^2d^2+2abcd=e^2f^2. \tag{2}$$

Legyen β az a legnagyobb nemnegatív egész, melyre $p^\beta \mid e^2$. Ha $\beta \ge \alpha$, akkor AC megfelelő átló. A továbbiakban feltesszük, hogy $\beta<\alpha$. Ekkor $p^\alpha \mid a^2$ és $p^\beta \mid c^2$ (ha CD átló, akkor ez AC választása miatt igaz, ha CD oldal, akkor $\beta<\alpha$ miatt), tehát $p^{\alpha+\beta} \mid a^2c^2$. Hasonlóan $p^{\alpha+\beta} \mid b^2d^2$. Mivel e^2f^2 is egész, így (2) alapján $2abcd$ is az. Viszont $p^{2(\alpha+\beta)} \mid 4a^2b^2c^2d^2$, így $p^{\alpha+\beta} \mid 2abcd$. Ezt felhasználva (2)-ből következik, hogy $p^{\alpha+\beta} \mid e^2f^2$, így $p^{\beta+1} \nmid e^2$ miatt $p^\alpha \mid f^2$, azaz ekkor a BD átló megfelelő.