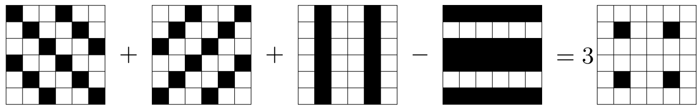
Lajkó Kálmán megoldása. Keressük meg az ilyen $n \times n$-es négyzeteket! Ha egy négyzetre van megfelelő kitöltés, akkor $3 \mid n$, ez nyilvánvaló.

Azt se nehéz látni, hogy ha van egy $n \times n$-es négyzetre egy kitöltésünk, akkor minden $(kn) \times (kn)$-es négyzetre is, hiszen jó kitöltésű $n \times n$-es négyzetből k^2-et egymásra lehet pakolni, ekkor a sorok és oszlopok nyilván eleget tesznek a feltételeknek, és az átlók is, mivel belátható, hogy ha egy átló hossza a kn-es négyzetben hárommal osztható, akkor az átlónak az egyes n-es négyzetekkel vett metszetei is hárommal osztható hosszúságúak.



Érdemes kis négyzetekre az állítást kipróbálni, az $n = 9$ esetre van kitöltés is, így már lehet tudni, hogy a $9 \mid n$-es négyzetekre mindig van kitöltés.

Ezután megpróbáljuk belátni, hogy ha n nem osztható kilenccel, de hárommal igen, akkor nem lehet kitölteni a négyzetet.

Ezt indirekten csináljuk, tegyük fel, hogy ki lehet tölteni egy ilyen $(n = 3k)$-s táblázatot, ahol k nem osztható 3-mal.

Erre a csomó betűre vonatkozó hárommal való oszthatóságot össze lehet adogatni, ki lehet vonni egymásból, az eredményre is igaz lesz hogy a betűk egyharmada I, M és O (ez ilyen egyenletrendszeres ötlet). Ezt úgy kell érteni, hogy ha többször van egy mező I betűje az összegben, akkor annyiszor adódik hozzá az I-k számához, vagy a kivonás miatt lehet hogy negatív sokszor szerepel az összegben, és ekkor ez levonódik az I-k számából. Az összegben tehát mezők betűi szerepelnek, egész sokszor, és az I-k, M-ek és O-k száma azonos.

I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M

Vegyük a táblázatunkat, adjuk össze az összes hárommal osztható átlót (vagyis hogy összesen hány I, M, O van bennük összesen), adjuk hozzá a 2.; 5.; 8.; $\ldots$; $(3l+2)$-edik oszlopokat, és ebből vonjuk ki az összes az 1., 3., 4., 6. stb. sorokat, vagyis a nem $(3l+2)$-edik sorokat. Nézzük meg, hogy ebben hány darab I betű van. Az átlókból van $3; 6; \ldots; 3k; 3k-3; \ldots; 3$ hosszú, mindkét irányban, ezekben összesen $2\big(1+2+\ldots k+1+2+\cdots+(k-1)\big) = k(k+1)+(k-1)k = 2k^2$ darab I betű van. Az oszlopokban van $\dfrac{kn}{3} = k^2$, és ebből még le kell vonni a sorokban lévő I-k számát, ami $2k \cdot \dfrac{n}{3} = 2k^2$. Ezeket összegezve, az I-k száma: $2k^2 + k^2 - 2k^2 = k^2$, ami hárommal nem osztható.

Viszont ha megnézzük, hogy az egyes mezőket hányszor számoltunk az összegben, akkor azt figyelhetjük meg, hogy a nem $3l+2$ alakú sorokban lévő mezők pont kiesnek, és a visszamaradó mezőket mind háromszor számoltuk meg, a két átlóban és az oszlopokban, ezek a $(3x+2; 3y+2)$ koordinátájú mezők. Ez azt jelenti, hogy az I-k száma az összegben hárommal osztható kell hogy legyen. Ez ellentmondás.