Williams Kada megoldása. A bonyolult ábra miatt célszerű egy jól megszerkesztett ábrán minden újonnan felvett pontra megvizsgálni, milyen tulajdonságai vannak. Miután az ábra rejtelmeit kiismertük, a befejezés önként fog adódni.

A szögszámításhoz legyen

$$BAC\sphericalangle = CAD\sphericalangle = ACD\sphericalangle = DAE\sphericalangle = ADE\sphericalangle = \alpha,$$

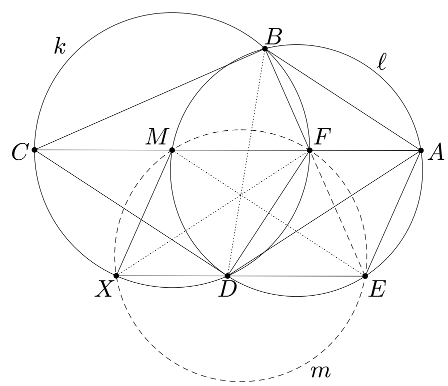
ezek egyenlőségét a D és E pont definíciója indokolja. Ekkor $BFC\sphericalangle = FBA\sphericalangle + FAB\sphericalangle = 2\alpha$. A kerületi, illetve kerületi és középponti szögek tételét és azok megfordítását KT, illetve KKT rövidíti.

A következő lépésekben igazoljuk a feladat állítását:

1. Az ABC kör középpontja D.
2. B, C, D, F egy k körre illeszkedik.
3. $ABCD \sim AFDE$.
4. B, F, E egy egyenesen van.
5. A, B, M, D, E egy ℓ körre illeszkedik.
6. Az X pont is a k körön van.
7. $MXEF$ húrtrapéz, körülírt köre m.
8. A hatványpont-tételt k, ℓ, m körökre alkalmazva készen vagyunk.

Az egyes lépések belátása lényegében csak szögszámítás, így érdemes magának az Olvasónak megpróbálni ellenőrizni őket.

A lépések indoklása alább olvasható:



1. $ABC\sphericalangle = 90° + \alpha$ és $ADC\sphericalangle = 180° - 2\alpha$ (mert $DA = DC$). KKT miatt D csakis az ABC kör középpontja lehet.

2. Ez KT-vel adódik: $BFC\sphericalangle = 2\alpha = BDC\sphericalangle$, utóbbi az ABC körre vett KKT miatt.

3. A k körbeli KT-ből $CDF\sphericalangle = 90°$, így $AFD\sphericalangle = CDF\sphericalangle + DCF\sphericalangle = 90° + \alpha$. Innen két szög egyezése miatt $ABC \sim AFD$, de $ADC \sim AED$ miatt $ABCD \sim AFDE$ is igaz.

4. Mivel $DA = DB$ (1. lépés), a hasonlóságból $EA = EF$, s így $EFA\sphericalangle = 2\alpha = BFC\sphericalangle$, vagyis BF és FE egyenes egybeesik.

5. $CBF\sphericalangle = 90°$ lévén $\overline{CF}$ a k átmérője, M így k középpontja. Innen világos, hogy $MBF \sim DBA \sim EFA$, mert 2α alapon fekvő szögű egyenlő szárú háromszögek. A 4. lépés miatt $BMA\sphericalangle = BDA\sphericalangle = BEA\sphericalangle$ adódik, és így KT szerint A, B, M, D, E egy körön van.

6. $EDA\sphericalangle = DAC\sphericalangle = \alpha$ lévén $DE \parallel AC$, vagyis E, D, X kollineáris. $AMXE$ paralelogrammából $MXD\sphericalangle = MAE\sphericalangle = 2\alpha$, és az ℓ körbeli KT-ből $MDE\sphericalangle = 180° - MAE\sphericalangle$, amiért $MDX\sphericalangle = 2\alpha$. Tehát $MD = MX$, azaz X a k körön van.

7. Az $AMXE$ paralelogrammából az EFA egyenlő szárú háromszöget kivágva egy húrtrapézt kapunk, az $MXEF$ húrtrapézt.

8. A k és ℓ körök hatványvonala BD, a k és m köröké FX, az ℓ és m köröké pedig ME. A hatványpont-tétel szerint e három egyenes egy pontra illeszkedik vagy párhuzamos. Nyilván nem párhuzamosak, ezért egy ponton mennek át.

Megjegyzés. Adható két másik, szintén tanulságos megközelítés, ami elsősorban nem köröket vizsgál. Kulcsészrevétel az 1–3. lépések után, hogy $BCDF$ és AFD körök sugara egyenlő, hisz FD közös húrjukhoz mindkettőben α kerületi szög tartozik. Az adódó egyenlő szakaszokból az alábbi befejezések kínálkoznak:

(a) ME-re tükrözve B, D képe X, F lesz, így BD és FX az ME szimmetriatengelyen metsz;

(b) Az $MXEF$ húrtrapéz átlói oly szögűek, hogy a BMF körön messék egymást, így szimmetria miatt az MF ív felezőpontjára illeszkednek, akárcsak az MBF szög BD szögfelezője.