**I. megoldás.** Rendeljünk mindegyik élhez egy-egy különböző prímszámot, ez megtehető, mivel végtelen sok prímszám van.

Legyen a $\mathcal{H}_i$ halmazban azoknak a prímeknek az összes pozitív egész kitevős hatványa, amelyek azokon az éleken vannak, amik a $\mathcal{H}_i$-hez tartozó csúcsból indulnak ki.

Ha két csúcs össze van kötve egy éllel, akkor mindkét halmazban benne vannak az élhez rendelt prím pozitív egész kitevős hatványai, tehát a két halmaz metszete végtelen.

Ha két csúcs nincsen éllel összeköteve, akkor különféle élekhez tartozó prímek hatványai szerepelnek csak a két halmazban, a metszetük üres halmaz.

Ez a konstrukció megfelel a feladat feltételeinek.

**II. megoldás.** Először véges részhalmazokat rendelünk a csúcsokhoz úgy, hogy két ilyennek a metszete pontosan akkor üres, ha a megfelelő csúcsok nincsenek éllel összekötve. Ezt a csúcsok száma szerinti indukcióval láthatjuk be: egy vagy két csúcsra ez nyilvánvaló. Ha pedig $n-1$ csúcsú gráfokra igaz, és a halmazok uniójának legnagyobb eleme $k$, akkor az $n$-edik csúcs szomszédaihoz tartozó részhalmazokat bővítsük rendre $(k+1)$-gyel, $(k+2)$-vel stb.; az $n$-edik csúcshoz pedig tartozzon a $\{k+1, k+2, \ldots\}$ halmaz.

A $G$ gráf csúcsaihoz rendelt halmazok „végtelenítése”: ha a véges halmazok uniójának legnagyobb eleme $M$, akkor minden részhalmazhoz és annak mindegyik $t$ elemére vegyük hozzá az összes $t+iM$ számot, valamennyi $i>1$ egészre. Ha az így kapott (végtelen) halmazok közül kettőnek $t$ közös eleme, akkor van végtelen sok közös elemük is: $t+M$, $t+2M$, $\ldots$ . Ha pedig két diszjunkt véges halmaz végtelenre bővítettjeinek $t_1+iM=t_2+jM$ közös eleme lenne, akkor $|t_1-t_2|=|i-j|M$, ahol $0<t_1, t_2 \leq M$ és $t_1 \neq t_2$ miatt a bal oldal értéke $M$-nél kisebb pozitív szám, a jobb oldal viszont nagyobb mint $M$, ami ellentmondás.