Megjegyzés. A megoldáshoz vezető alábbi ötletre sokan rájöttek. Ha igaz az állítás, akkor annak úgy is teljesülnie kell, ha az adott egyenesek mindegyike ugyanazon az O ponton halad át, és ugyanez a metszéspont van $2n$ multiplicitással megadva. Ha ekkor egy O-tól különböző P pont rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, akkor az OP félegyenes bármely pontja ilyen tulajdonságú. Márpedig, ha „kellően messziről" nézünk rá a síkra, akkor az egyenesek és a pontok „nagyon közel" lesznek ehhez az állapothoz. Az utolsó ötlet pedig az, hogy ha nagyon sok egyenes van adva, és azok egy szabályos $6n$ oldalú sokszög átmérői, akkor P-nek az egyenesektől mért össztávolsága „nagyjából" arányos lesz az OP távolsággal. Tehát ha az állítás igaz, akkor annak már egy véletlenül választott P pontra is pozitív valószínűséggel kell teljesülnie. Ezeket a gondolatokat bontjuk ki az alábbi megoldásban.

Megoldás. Válasszunk egy olyan k kört a síkon, amiből a $3n$ egyenes mindegyike olyan húrt metsz ki, amihez legalább $\left(1-\dfrac{1}{10n}\right)\pi$ nagyságú középponti szög tartozik. Könnyen látható, hogy létezik ilyen kör: válasszuk a k kör O középpontját tetszőlegesen, sugara pedig

$$r = d\cdot\cos\left(\left(\frac{10n-1}{20n}\right)\pi\right)$$

legyen, ahol d az adott egyeneseknek az O-tól mért távolságai közül a legnagyobb.

Ha H egy, a k körbe írt szabályos hatszög és e a megadott egyenesek egyike, akkor azt mondjuk, hogy H *jó e-hez,* ha H-nak $3-3$ csúcsa esik e mindkét partjára, azaz e a H két átellenes oldalát metszi. A k választása folytán az olyan szabályos hatszögek csúcsai, amik nem jók e-hez a k körnek hat ívét alkotják, és mindegyik ívhez legfeljebb $\dfrac{\pi}{10n}$ nagyságú középponti szög tartozik. Mivel $6\cdot 3n$ ilyen ív nem fedheti a k kört, ezért található olyan k-ba írt $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ szabályos hatszög, ami a megadott $3n$ egyenes mindegyikéhez jó. Sőt, még az is feltehető, hogy a $3n$ egyenes egyike sem merőleges a $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ hatszög egyetlen oldalára sem.

Azt állítjuk, hogy a P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 pontok valamelyike rendelkezik a feladatban leírt tulajdonsággal. Ehhez elegendő megmutatni, hogy e hat pontnak a $2n$ megadott ponttól vett távolságösszege több, mint a $3n$ egyenestől vett távolságösszege, hiszen ekkor nem lehetséges hogy mindegyik P_i-nek a pontoktól mért távolságösszege legalább akkora legyen, mint az egyenesektől való. Legyen tehát X a megadott pontok valamelyike. A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$|\overline{P_1X}|+|\overline{P_4X}|\ge|\overline{P_1P_4}|=2r,$$

hisz P_1 és P_4 az r sugarú k kör átellenes pontjai. Hasonló okból

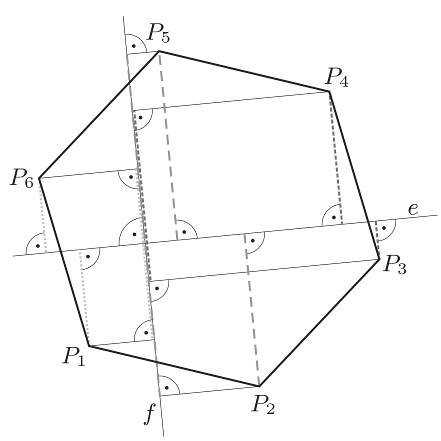
$$|\overline{P_2X}|+|\overline{P_5X}|\ge|\overline{P_2P_5}|=2r \quad\text{és}\quad |\overline{P_3X}|+|\overline{P_6X}|\ge|\overline{P_3P_6}|=2r,$$

tehát

$$|\overline{P_1X}|+|\overline{P_2X}|+|\overline{P_3X}|+|\overline{P_4X}|+|\overline{P_5X}|+|\overline{P_6X}|\ge 6r.$$

A megadott pontok mindegyikére összeadva a fenti becslést azt kapjuk, a P_i pontoknak a $2n$ megadott ponttól vett távolságösszege legalább $12rn$. A bizonyítás befejezéséhez az alábbiakban azt igazoljuk, hogy a P_i pontoknak az egyenesektől mért távolságösszege kisebb $12rn$-nél.

Legyen e a megadott $3n$ egyenes valamelyike. Feltehetjük, hogy e a P_1P_6 és P_3P_4 oldalakat metszi, azaz e egyik partján a P_1, P_2 és P_3, míg a másikon a P_4, P_5 és P_6 pontok vannak. Világos, hogy a P_1 és P_6 pontoknak az e egyenestől mért távolságainak összege megegyezik a $\overline{P_1P_6}$ szakasznak egy e-re merőleges f egyenesre vett merőleges vetületének hosszával.



Hasonlóan, a P_2 és P_5, illetve a P_3 és P_4 pontok e-től mért távolságösszege a $\overline{P_2P_5}$, illetve a $\overline{P_3P_4}$ szakaszok f-re vett merőleges vetületének hossza. Márpedig a merőleges vetület hossza sosem nagyobb a vetített szakaszénál, jelen esetben pedig szigorúan kisebb annál, ugyanis a hatszöget úgy választottuk, hogy P_1P_6 nem merőleges e-re. Tehát a kérdéses távolságösszeg szigorúan kisebb, mint e három szakasz összhossza, azaz $|\overline{P_1P_6}|+|\overline{P_2P_5}|+|\overline{P_3P_4}|=r+2r+r=4r$, hiszen a szabályos hatszög oldalhossza megegyezik a köré írt kör sugarával, míg az átellenes csúcsokat összekötő húr a k kör átmérője.

Azt kaptuk, hogy a P_i-knek a megadott $3n$ egyenestől a távolságösszege kisebb, mint $3n \cdot 4r = 12rn$. Nekünk pedig pontosan ezt kellett bizonyítanunk. $\square$

Megjegyzés. A feladatbelinél erősebb állítás is igaz. Ha nem csak egy szabályos hatszög csúcsaival dolgozunk, hanem egy megfelelően nagy k körön egyenletes eloszlással választott véletlen pontra számítjuk ki a kérdéses távolságösszegek várható értékeit (ehhez a k kör mentén kell integrálni), akkor az is könnyen igazolható, hogy tetszőleges n pont és k egyenes esetén, ahol $k < \frac{\pi}{2} \cdot n$, mindig létezik olyan P pont a síkon, hogy P-nek a pontoktól vett távolságösszege legalább akkora, mint P-nek az egyenesektől mért távolságainak összege.