A binomiális együtthatók mintájára legyen

$$B(n,0)=1,\quad \text{és}\quad B(n,k)=\frac{a_n a_{n-1}\cdot\ldots\cdot a_{n-k+1}}{a_k a_{k-1}\cdot\ldots\cdot a_1},\quad \text{ha}\quad 1\le k\le n.$$

Az n szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy $B(n,k)$ egész szám.

A $k=0$ és $k=n$ esetekben az állításunk triviális, hisz $B(n,0)=B(n,n)=1$. Ez a megfigyelés egyúttal az $n=1$ esetet is bizonyítja. Tegyük fel tehát, hogy $0<k<n$, és $B(n',k')\in\mathbb{Z}$ teljesül minden $1\le k'\le n'<n$ értékre.

Az (1) definícióból láthatjuk, hogy

$$B(n,k)=\frac{a_n}{a_k}\cdot B(n-1,k-1)=\frac{a_n}{a_{n-k}}\cdot B(n-1,k).$$

A feladat feltétele szerint az a_n szám osztható a_k és a_{n-k} legnagyobb közös osztójával. Ezért vannak olyan x, y egész számok, amelyekre $a_kx+a_{n-k}y=a_n$. Ezt beírva (2)-be,

$$\begin{aligned}B(n,k)&=\frac{a_kx+a_{n-k}y}{a_n}\cdot B(n,k)=x\cdot\frac{a_k}{a_n}B(n,k)+y\cdot\frac{a_{n-k}}{a_n}B(n,k)=\\&=x\cdot B(n-1,k-1)+y\cdot B(n-1,k).\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint a jobb oldalon álló számok egészek, így $B(n,k)$ is egész. $\square$

Megjegyzések. 1. Az $1,2,3,\ldots$ sorozatra triviálisan fennáll a kívánt feltétel. A feladat erre a konkrét sorozatra éppen a a binomiális együtthatók egész tulajdonságát állítja. A kitűzött feladat tehát arra mutat rá, hogy a szorzatok hányadosának egész tulajdonsága már egy, az $a_1,a_2,\ldots$ sorozatról kikötött jóval gyengébb feltételből is következik.

2. Több versenyző próbálkozott annak becslésével, hogy egy p prím milyen kitevőn osztja a számlálót, illetve a nevezőt. Nem nagyon nehéz megmutatni, hogy tetszőleges q prímhatványnak legalább annyi többszöröse van az $a_n,a_{n-1},\ldots,a_{n-k+1}$ számok között, mint az $a_1,a_2,\ldots,a_{k-1}\cdots a_k$ számok között. Ebből a megfigyelésből pedig könnyen adódik a feladat megoldása.