Megoldás. Azt állítjuk, hogy pontosan akkor léteznek a kívánt a_i és b_j számok, ha n és k relatív prímek. Ehhez elsőként igazoljuk, hogy az állítás elégséges. Tegyük fel tehát, hogy $(n, k) = 1$. Legyen $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq k$ esetén $a_i = ik + 1$, illetve $b_j = jn + 1$. Az $a_i b_j = ijnk + ik + jn + 1$ szám n-nel osztva $ik + 1$, k-val osztva pedig $jn + 1$ maradékot ad. Az n és k relatív prím volta miatt $1 \leq i \leq n$ esetén az $ik + 1$ számok páronként különböző maradékot adnak n-nel osztva, $1 \leq j \leq k$ esetén pedig a $jn + 1$ számok páronként különböző maradékot adnak k-val osztva. Ha ugyanis mondjuk $ik + 1$ és $i'k + 1$ ugyanazt a maradékot adják n-nel osztva, akkor $n \mid ik + 1 - (i'k + 1) = (i - i')k$, ahonnan $n \mid (i - i')$ következik, hiszen n-nek és k-nak nincs közös prímosztója. Ez utóbbi oszthatóság és $1 \leq i, i' \leq n$ miatt $i = i'$.

Azt kaptuk tehát, hogy bárhogyan is veszünk két különböző $a_i b_j$ szorzatot, azok n-nel vagy k-val osztva különböző maradékot adnak. Nem lehetséges tehát, hogy két különböző szorzat nk-val osztva azonos maradékot adjon, nekünk pedig éppen erre van szükségünk.

A szükségesség bizonyításához azt tesszük fel, hogy az a_i és b_j számok rendelkeznek a feladatban leírt tulajdonsággal. Ez azt is jelenti, hogy valamelyik, mondjuk $a_1 b_1$ szorzat nk-val osztva 0 maradékot ad, azaz $nk \mid a_1 b_1$. Legyen $a = (a_1, nk)$ és $b = (b_1, nk)$. Világos, hogy $nk \mid ab$, ezért $nk \leq ab$.

Figyeljük meg, hogy a k db $a_1 b_j$ szorzat mindegyike osztható a-val. Márpedig az nk szerinti osztási maradékok között pontosan $\frac{nk}{a}$ olyan van, amely a-val osztható. Ez azt jelenti, hogy $k \leq \frac{nk}{a}$, azaz $a \leq n$. Hasonló gondolatmenet igazolja a $b \leq k$ becslést. Ezek szerint $ab \leq nk$, amit a korábbi $nk \leq ab$ megfigyeléssel összevetve azt kapjuk, hogy $ab = nk$. Ez utóbbi pedig csak úgy lehetséges, ha $a = n$ és $b = k$.

Jelölje d az n és k legnagyobb közös osztóját. Ekkor n és k legkisebb közös többszöröse $M = \frac{nk}{d}$. Számoljuk meg, hány olyan osztási maradék van nk szerint, amely n-nel vagy k-val osztható. Világos, hogy k maradék osztható n-nel és n maradék k-val, ám azokat a maradékokat, amelyek n-nel és k-val is oszthatók, kétszer számoltuk meg. Ezek éppen az M-mel osztható maradékok, számuk tehát $\frac{nk}{M} = d$. Ezért pontosan $n + k - d$ olyan nk szerinti maradék van, amely n-nel vagy k-val osztható. Azonban $n \mid a_1$ és $k \mid b_1$ miatt az $a_1 b_j$, illetve $a_i b_1$ szorzatok oszthatók n-nel, illetve k-val. Az ilyen szorzatok száma pedig $n + k - 1$, ezért $n + k - 1 \leq n + k - d$, azaz $1 \geq d = (n, k)$. Ezek szerint n és k valóban relatív prímek, ezzel pedig a feltétel szükségességét is igazoltuk. $\square$

Megjegyzés. A szükségességet igazoló gondolatmenet Dankovics Attila megoldásából származik.