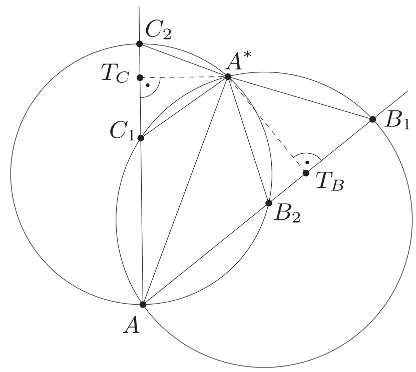
Megoldás. A jól ismert Ceva-tétel trigonometrikus alakját fogjuk használni, amely szerint az AA^*, BB^* és CC^* egyenesek pontosan akkor mennek át egy ponton, ha

$$\frac{\sin BAA^*\sphericalangle}{\sin CAA^*\sphericalangle}\cdot\frac{\sin ACC^*\sphericalangle}{\sin BCC^*\sphericalangle}\cdot\frac{\sin CBB^*\sphericalangle}{\sin ABB^*\sphericalangle}=1.$$



Az első tört kiszámításához figyeljük meg, hogy $AB_2A^*C_2$ húrnégyszög, ezért $AC_2A^*\sphericalangle = A^*B_2B_1\sphericalangle$; továbbá $AB_1A^*\sphericalangle = A^*C_1C_2\sphericalangle$, hiszen $AB_1A^*C_1$ is húrnégyszög.

A megfelelő szögek egyenlősége miatt tehát $A^*C_1C_2\triangle \sim A^*B_1B_2\triangle$, így a megfelelő oldalak aránya megegyezik a hozzájuk tartozó magasságok arányával, vagyis

$$\frac{|B_1B_2|}{|C_1C_2|}=\frac{|A^*T_B|}{|A_*T_C|},$$

ahol rendre T_B, illetve T_C jelöli az A^*-ból az AB, illetve AC egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjait. Tudjuk még, hogy

$$\sin BAA^*\sphericalangle=\frac{|A^*T_B|}{|AA^*|},\quad \text{illetve}\quad \sin CAA^*\sphericalangle=\frac{|A^*T_C|}{|AA^*|},$$

ezért

$$\frac{\sin BAA^*\sphericalangle}{\sin CAA^*\sphericalangle}=\frac{|A^*T_B|}{|A^*T_C|}=\frac{|B_1B_2|}{|C_1C_2|}.$$

Hasonlóan látható be, hogy

$$\frac{\sin ACC^*\sphericalangle}{\sin BCC^*\sphericalangle}=\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|},\quad \text{illetve}\quad \frac{\sin CBB^*\sphericalangle}{\sin ABB^*\sphericalangle}=\frac{|C_1C_2|}{|A_1A_2|}.$$

A Ceva-tételben szereplő szorzatra tehát

$$\frac{\sin BAA^*\sphericalangle}{\sin CAA^*\sphericalangle}\cdot\frac{\sin ACC^*\sphericalangle}{\sin BCC^*\sphericalangle}\cdot\frac{\sin CBB^*\sphericalangle}{\sin ABB^*\sphericalangle}=\frac{|B_1B_2|}{|C_1C_2|}\cdot\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|}\cdot\frac{|C_1C_2|}{|A_1A_2|}=1$$

adódik, és nekünk pontosan ezt kellett bizonyítanunk. $\square$