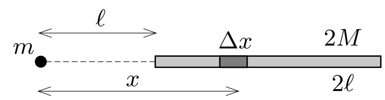
I. megoldás. Számítsuk ki először, hogy mekkora gravitációs vonzóerőt fejt ki a 2ℓ hosszúságú rúd az m tömegű testre! A rudat – gondolatban – felbonthatjuk kicsiny, Δx hosszú darabkákra (*1. ábra*), és ezen darabkák által az m tömegű testre kifejtett erőt külön-külön vizsgálhatjuk, majd ezeket az erőket összegezhetjük. Egy ilyen darabka tömege

$$\Delta M = \frac{\Delta x}{2\ell} 2M = \frac{M}{\ell}\Delta x.$$



1. ábra

Vegyünk egy tetszőleges, az m tömegű testtől x távolságra lévő kicsiny rúddarabot. Ez a ($\Delta x \ll \ell$ esetén pontszerűnek tekinthető) rúddarab a gravitációs erőtörvény alapján

$$\Delta F_1 = \gamma \frac{m\,\Delta M}{x^2} = \gamma \frac{m\,\frac{M}{\ell}\cdot \Delta x}{x^2} = \gamma \frac{mM}{\ell}\,\frac{1}{x^2}\,\Delta x$$

erőt fejt ki a m tömegű, pontszerű testre.

Az egész rúd által kifejtett erőt ezen kis erőjárulékok összegzéséből kaphatjuk meg:

$$F_1 = \sum_{x=\ell}^{3\ell} \Delta F_1 = \sum_{x=\ell}^{3\ell} \gamma \frac{mM}{\ell}\,\frac{1}{x^2}\,\Delta x = \gamma \frac{mM}{\ell} \sum_{x=\ell}^{3\ell} \frac{1}{x^2}\,\Delta x.$$

Ha a felosztást finomítjuk (vagyis Δx-et egyre kisebbnek választjuk), az összegzésről integrálásra térhetünk át:

$$F_1 = \gamma \frac{mM}{\ell} \int\limits_{\ell}^{3\ell} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \gamma \frac{mM}{\ell} \left[-\frac{1}{x}\right]_{\ell}^{3\ell} = \gamma \frac{mM}{\ell} \left(-\frac{1}{3\ell} - \left(-\frac{1}{\ell}\right)\right) = \frac{2}{3}\gamma \frac{mM}{\ell^2}.$$

Hasonlóan számíthatjuk ki a másik rúd gravitációs vonzóerejét:

$$\Delta F_2 = \gamma \frac{mM}{\ell}\,\frac{1}{x^2}\cdot \Delta x,$$

$$F_2 = \sum_{x=2\ell}^{3\ell} \gamma \frac{mM}{\ell}\,\frac{1}{x^2}\,\Delta x \approx \gamma \frac{mM}{\ell} \int\limits_{2\ell}^{3\ell} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \gamma \frac{mM}{\ell} \left[-\frac{1}{x}\right]_{2\ell}^{3\ell} = \gamma \frac{mM}{\ell} \left(-\frac{1}{3\ell} - \left(-\frac{1}{2\ell}\right)\right) = \frac{1}{6}\gamma \frac{mM}{\ell^2}.$$

Az m tömegű testre ható eredő gravitációs erő nagysága tehát:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \frac{\sqrt{17}}{6}\,\gamma \frac{mM}{\ell^2}.$$

iránya pedig a 2ℓ hosszúságú rúd irányával $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{F_2}{F_1} = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{4} \approx 14^\circ$-os szöget zár be.

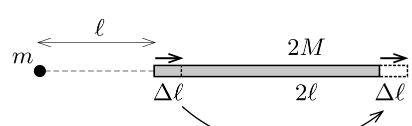
II. megoldás. A feladat elemi úton, az integrálszámítás ismerete nélkül is megoldható. A megoldáshoz „csak” annyit kell tudnunk, hogy két pontszerű test gravitációs helyzeti energiája

$$W = -\gamma \frac{m_1 m_2}{x},$$

ahol m_1 és m_2 a testek tömege, x pedig a távolságuk.

Megjegyzés. Ezt az összefüggést a ponttöltések elektrosztatikus energiájának mintájára írhatjuk fel, hivatkozva a Coulomb-törvény és a Newton-féle gravitációs törvény analógiájára.

Vizsgáljuk először csak a 2ℓ hosszúságú rudat. Ez a rúd valamekkora F_1 erővel hat az m tömegű testre, az pedig ugyanekkora erővel visszahat a rúdra. Toljuk el (gondolatban) a rudat kicsiny $\Delta\ell \ll \ell$ távolsággal, miközben az m tömegű testet az eredeti helyén tartjuk (*2. ábra*). Ekkor a gravitáció ellenében $F_1\Delta\ell$ munkát végzünk.



2. ábra

Másrészt a rúd elmozdításával a két test között megváltozik a gravitációs potenciális energia, hiszen a rúd minden darabkája kicsit távolabb kerül az m tömegű testtől. Mivel a rúd csak nagyon kis mértékben mozdult el a helyéről, új helyzetének legnagyobb része „átfedésben van” a régivel, tehát vehetjük úgy, mintha egy kicsiny $\Delta\ell$ hosszúságú darabot a rúd egyik végéről a másik végére helyeztünk volna át. Ekkor egyedül ezen $\Delta\ell$ hosszú darabnak változik meg az m tömegű testhez viszonyított potenciális energiája, és ez a változás:

$$\Delta W = \gamma \frac{mM}{\ell} \Delta\ell \left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{3\ell} \right) = \frac{2}{3} \gamma \frac{mM}{\ell^2} \Delta\ell.$$

Mivel a potenciális energia megváltozását az általunk végzett munka fedezte:

$$\Delta W = F_1 \Delta\ell,$$

ahonnan leolvashatjuk, hogy

$$F_1 = \frac{2}{3} \gamma \frac{mM}{\ell^2}.$$

Hasonló módon számolhatjuk ki, hogy az ℓ hosszúságú rúdra ható erő:

$$F_2 = \frac{1}{6} \gamma \frac{mM}{\ell^2},$$

és innen az I. megoldásban leírt módon megkapható az eredő erő nagysága és iránya.