Megoldás. *a*) Legyen a kezdetben mozgó test tömege m, a sebessége pedig v. Ezek kifejezhetők az energia és a lendület segítségével:

$$E=\frac{1}{2}mv^2,\qquad I=mv,$$

ahonnan

$$m=\frac{I^2}{2E}\qquad \text{és}\qquad v=\frac{2E}{I}.$$

A két test tömegközéppontjának sebessége az ütközés előtt

$$v_0=\frac{I}{M+m}=\frac{I}{M+\frac{I^2}{2E}}=\frac{2EI}{2EM+I^2},$$

és ez a sebesség az ütközés során sem változik. Az M tömegű, kezdetben álló test az ütközés előtt v_0 sebességgel közeledik a tömegközéppont felé. A tökéletesen rugalmas ütközés után ugyanekkora nagyságú sebességgel fog távolodni a tömegközépponttól, tehát a „laboratóriumi rendszerben” a sebessége

$$u=2v_0=\frac{4EI}{2EM+I^2}$$

lesz. A kezdetben álló testnek átadott energia tehát

$$W(E,I)=\frac{1}{2}Mu^2=8M\left(\frac{EI}{2ME+I^2}\right)^2.$$

b) Adott I_0 lendület esetén a $0\le E<\infty$ intervallumon $W(E)$ szigorúan monoton növekvő függvény, hiszen a fenti képletben a zárójelben álló kifejezés reciproka

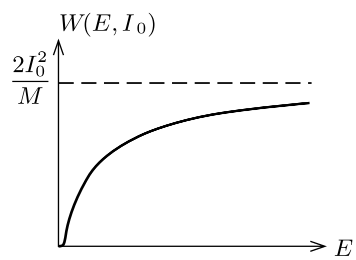
$$\frac{1}{\sqrt{W}}\sim\frac{2ME+I_0^2}{EI}=\text{állandó}+\frac{\text{állandó}}{E},$$

ami E növekedtével monoton csökken. A függvény határértéke $E\gg I_0^2/(2M)$ esetén $2I_0^2/M$.

Megjegyzés. A függvény monoton növekedése a derivált előjeléből is leolvasható:

$$W'(E)=\frac{16MI_0^4E}{\left(2ME+I_0^2\right)^3}>0.$$

Az *1. ábra* az átadott energiát mutatja az ütköző test E energiájának függvényében, rögzített I_0 lendület mellett.



1. ábra

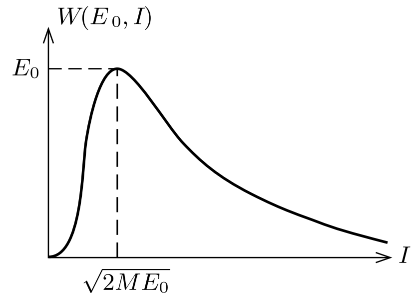
Adott E_0 energia mellett a $W(E_0,I)$ függvénynek $I=\sqrt{2ME_0}$ értéknél maximuma van, és a legnagyobb átadott energia éppen E_0 (*2. ábra*). Ezt a függvény deriváltjának előjelváltásából olvashatjuk le, de elemi úton, a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenségből is beláthatjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{W}}=\frac{1}{E_0\sqrt{8M}}\left(I+\frac{2ME_0}{I}\right)\ge\frac{1}{E_0\sqrt{8M}}\cdot 2\sqrt{I\,\frac{2ME_0}{I}}=\frac{1}{\sqrt{E_0}},$$

vagyis $W\le E_0$, és az egyenlőség akkor áll fenn, amikor

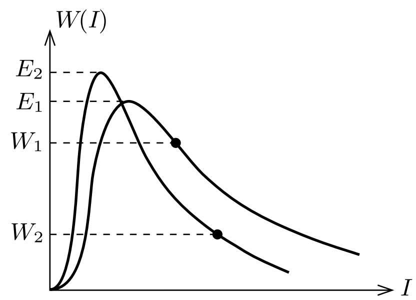
$$I=\frac{2ME_0}{I},\qquad \text{azaz}\qquad I=\sqrt{2ME_0}.$$

Ebben az esetben a két test tömege megegyezik, és az ütköző test a teljes mozgási energiáját átadja az eredetileg álló másik testnek.



2. ábra

c) A *3. ábra* az átadott energiát mutatja I függvényében két esetben: egy E_1 energiájú testnél, illetve egy másik, $E_2 > E_1$ energiájú testnél.



3. ábra

Az ábrán jól látható, hogy a kisebb energiájú test által átadott W_1 energia lehet nagyobb, mint a nagyobb energiájú test által átadott W_2 energia.