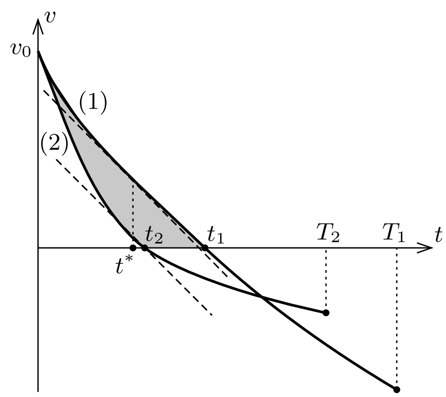
Megoldás. Válasszuk a felfelé mutató irányt pozitívnak, és jelöljük az acélgolyót 1-es, a strandlabdát 2-es számmal! A testek gyorsulása a felfelé mozgás során

$$a_{1,2}^{(\text{fel})} = -g - c_{1,2} \cdot v^2,$$

ahol $c_{1,2}$ az egyes testekre jellemző, a közegellenállási erőből származó állandó. Ez az állandó egyenesen arányos a test homlokfelületének területével és a levegő sűrűségével, továbbá fordítottan arányos a test tömegével. Mivel az acélgolyó homlokfelülete sokkal kisebb, mint a strandlabdáé, tömege pedig (nagyságrendileg) ugyanakkora, mint a labda tömege, biztosan teljesül, hogy $c_1 < c_2$.

A gyorsulás adja meg a $v(t)$ grafikon meredekségét. A felfelé mozgás során a testek sebessége nyilván csökken, vagyis a gyorsulás nagysága csökken, a grafikon egyre lankásabb, azaz $v(t)$ grafikonja konvex. Mivel $c_1 < c_2$, azonos v sebesség esetén az acélgolyó gyorsulása abszolút értékben kisebb, tehát az acélgolyó $v(t)$ grafikonjának meredeksége minden v sebességnél kisebb, mint a labda sebesség-idő grafikonjának meredeksége, feltéve, hogy a labda, illetve a golyó felfelé mozog.



A testek gyorsulása a lefelé mozgás során

$$a_{1,2}^{(\text{le})} = -g + c_{1,2} \cdot v^2.$$

Lefelé mozogva a sebesség tovább csökken (abszolút értéke növekszik), a gyorsulás nagysága (a $v(t)$ görbe meredeksége) csökken, vagyis a grafikon továbbra is konvex marad.

A testek indulási sebessége – a feladat szövege szerint – ugyanakkora (v_0). A visszaérkezési sebességről – a munkatétel alapján – azt állítjuk, hogy a kiindulási sebességnél biztosan kisebb abszolút értékű. A nehézségi erő (konzervatív erőtér) összes munkavégzése ugyan nulla, de a közegellenállási erő mindig ellentétes irányú a pillanatnyi sebességgel, így mindvégig negatív munkát végez, energiát disszipál.

Megjegyzés. A két test visszaérkezési sebességének egymással történő összehasonlítása (amit a feladat nem kérdezett) bonyolultabb probléma. Igaz ugyan, hogy az acélgolyóra ható közegellenállási erő kisebb, mint az ugyanakkora sebességgel mozgó strandlabdára ható közegellenállási erő, tehát az energiadisszipáció teljesítménye a labdánál nagyobb, viszont a mozgások időtartama is különböző. Ha az acélgolyóra ható közegellenállást elhanyagolhatóan kicsinek tekintjük ($c_1 \approx 0$), akkor a labda végsebességének abszolút értéke biztosan kisebb, mint az acélgolyóé, ami – nagyságát tekintve – közelítőleg v_0-lal egyezik meg.

A sebesség–idő grafikonon a görbe alatti terület mutatja meg a test által bizonyos idő alatt megtett utat. Ha a maximális emelkedési magasságra vagyunk kíváncsiak, akkor a grafikon alatti területet addig a t_1, illetve t_2 időpillanatig kell vizsgálnunk, amikor a strandlabda, illetve az acélgolyó sebessége nullává válik. A grafikonról leolvasható, hogy az acélgolyó magasabbra jut, mint a strandlabda, hiszen az emelkedési magasságuk különbsége (az *ábrán* szürkén jelölt terület) *pozitív.*

A két görbe meredeksége akkor egyezik meg, ha a testek gyorsulása ugyanakkora, vagyis ha van olyan t^* pillanat, amikor

$$-g - c_1 \cdot \left[v_1(t^*)\right]^2 = -g - c_2 \cdot \left[v_2(t^*)\right]^2, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{v_1(t^*)}{v_2(t^*)} = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} > 1.$$

Ilyen pillanat biztosan létezik, hiszen az

$$f(t) \equiv \frac{v_1(t)}{v_2(t)}$$

függvény kezdetben (a feldobás pillanatában) 1 értéket vesz fel, a továbbiakban folytonosan változik, és a strandlabda megállásának pillanatához közeledve tetszőlegesen naggyá válik (végtelenhez tart). Az $f(t)$ folytonos függvény minden 1-nél nagyobb értéket felvesz, tehát lesz olyan t^* pillanat, amikor éppen $\sqrt{c_2/c_1}$-gyel egyenlő. Ebben a pillanatban a két test gyorsulása ugyanakkora, tehát a $v_1(t)$ és a $v_2(t)$ grafikonjának meredeksége megegyezik.

Megjegyzések. 1. Ha az acélgolyóra ható közegellenállást elhanyagolhatóan kicsinek tekintjük ($c_1 \approx 0$), akkor a golyó gyorsulása mindvégig $-g$. A labda gyorsulása a megállásának pillanatában (a pályájának legmagasabb pontján) lesz ugyanekkora, tehát ekkor egyezik meg a két görbe meredeksége.

2. A strandlabda földre esésének T_2 időpontját az a feltétel határozza meg, hogy $v_2(t)$ grafikonjának görbe alatti területe a $0 < t < t_2$ intervallumon ugyanakkora, mint $v_2(t)$ és a t tengely közötti terület a $t_2 < t < T_2$ intervallumon. Hasonló módon olvashatjuk le a grafikonról az acélgolyó visszaérkezésének T_1 idejét is.