Megoldás. Legyen $a = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$. A feladat feltételei szerint az összeg pozitív, továbbá az a egy szám és reciprokának az összege, így ismert, hogy $a \geq 2$, ahol egyenlőség csak $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x = 1$ esetén áll fenn. Tudjuk továbbá, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x &= (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\left(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x\right) = \\ &= (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\left[(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - 3 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x\right] = a\left(a^2 - 3\right).\end{aligned}$$

Ha $a \geq 2$ pozitív egész, akkor $a^2 - 3$ is pozitív egész, tehát a szorzat csak abban az esetben lehet prímszám, ha a prímszám és $a^2 - 3 = 1$.

$$a^2 - 3 = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - 3 = 1, \qquad \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2.$$

Ez csak akkor teljesül, ha $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x = 1$. Tehát az egyenlet megoldásai: $x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.