Megoldás. *a*) A fertőzés teljes elterjedésének lehetségessé válásához kezdetben (legalább) t^3 fertőzött mező szükséges. Ennyi esetén valóban elő is fordulhat, hogy elterjed, például, ha kezdetben egy $t \times t \times t$-es részben helyezkednek el a fertőzött mezők. Ekkor ugyanis könnyen láthatóan 3 perc alatt minden mező megfertőződik: 1 perc után azok a sorok, amiket a $t \times t \times t$-es kocka sorai határoznak meg, 2 perc után azok a síkok, amiket a $t \times t \times t$-es kocka síkjai határoznak meg, végül 3 perc után a többi mező is.

Annak bizonyítása, hogy ennél kevesebb fertőzött mező esetén nem lehetséges az elterjedés, a középiskolai tananyagon túlmutató bizonyítást igényel, lásd pl. a feladat internetes megoldásához betett cikket[1].

Foglalkozzunk most a feladat *b*) részével.

$2015^3 - \big(2015-(t-1)\big)^3$ fertőzött mező még nem biztos, hogy elegendő. Ha ennyi fertőzött mezőt úgy helyezünk el, hogy egy $\big(2015-(t-1)\big)$ élű kocka maradjon ki az egyik sarokban, akkor minden sorban (sor alatt a kocka valamelyik oldalélével párhuzamos sort értünk) csak $t-1$ fertőzött mező lesz, így a fertőzés nem terjed tovább.

Ha viszont már $2015^3 - \big(2015-(t-1)\big)^3 + 1$ mező fertőzött, akkor belátható, hogy biztosan megfertőződik az egész kocka.

Nézzük meg, hány fertőzött mezőjétől fertőződik meg biztosan egy 2-dimenziós, 2015×2015-ös „rétege” a kockának. Ha lesz legalább t darab olyan x irányú sor, amiben legalább t fertőzött mező van, akkor biztosan megfertőződik. Ha ez nem teljesül, az azt jelenti, hogy van legalább $2015-(t-1)$ darab x irányú sor, amiben legfeljebb $t-1$ fertőzött mező van. A többi $t-1$ sorban legfeljebb 2015 fertőzött mező lehet, tehát ez összesen legfeljebb

$$\big(2015-(t-1)\big)(t-1) + 2015(t-1) = 2015^2 - \big(2015-(t-1)\big)^2.$$

Ha több $(t-1)$-nél kevesebb fertőzött mezőt tartalmazó sor van, az természetesen összességében még kevesebb fertőzött mezőt tesz lehetővé. Tehát ha $2015^2 - \big(2015-(t-1)\big)^2$-nél több fertőzött mező van egy lapon, ott már muszáj legalább t darab, legalább t fertőzött mezőt tartalmazó sornak lennie, ezek az x irányú sorok a következő percben teljesen megfertőződnek, így minden y irányú sorban lesz legalább t fertőzött mező, és így minden megfertőződik.

Ugyanígy, ha van legalább t darab olyan $x-y$ irányú „réteg”, amiben legalább $2015^2 - \big(2015-(t-1)\big)^2 + 1$ fertőzött mező van, akkor biztosan megfertőződik az egész kocka, hiszen mint már megmutattuk, minden lap teljesen megfertőződik, és ezután minden z irányú sorban lesz legalább t fertőzött mező, így minden megfertőződik. Ha ez a feltétel nem teljesül, az azt jelenti, hogy van legalább $2015-(t-1)$ darab legfeljebb $2015^2 - \big(2015-(t-1)\big)^2$ fertőzött mezőt tartalmazó lap, a többi $t-1$ pedig legfeljebb 2015^2 fertőzött mezőt tartalmazhat, így összesen legfeljebb

$$\begin{aligned}\big(2015-(t-1)\big)\Big(2015^2 - \big(2015-(t-1)\big)^2\Big) + 2015^2(t-1) = \\ = 2015^3 - \big(2015-(t-1)\big)^3\end{aligned}$$

fertőzött mező esetén nem lenne biztos, hogy minden mező megfertőződik. Tehát $2015^3 - \big(2015-(t-1)\big)^3 + 1$ fertőzött mezőnél biztossá válik az egész kocka megfertőződése.

Megjegyzés. Az *a*) részre maximum 1 pontot adtunk. A *b*) rész 3 pontot ért, így a feladatra összesen 4 pontot lehetett legfeljebb kapni. A Versenyzőktől elnézést kér a matematika bizottság.

[1] Paul N. Balister, Béla Bollobás, Jonathan D. Lee, and Bhargav P. Narayanan: Line percolation; http://www.komal.hu/cikkek/egyeb/b4734cikk.pdf