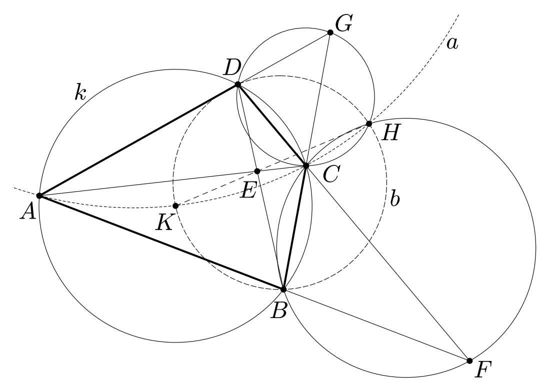
Megoldás. Először azt látjuk be, hogy a G, H, F pontok egy egyenesbe esnek.



$FHCB$ húrnégyszög, mivel mindegyik pontja rajta van a BFC háromszög köré írt körén. Hasonlóan $HGDC$ is húrnégyszög. Mindebből

$$FHC\sphericalangle = 180^\circ - FBC\sphericalangle = CBA\sphericalangle,$$
$$CHG\sphericalangle = 180^\circ - GDC\sphericalangle = CDA\sphericalangle.$$

$CBA\sphericalangle + CDA\sphericalangle = 180^\circ$, hiszen $ABCD$ húrnégyszög. Tehát $FHC\sphericalangle + CHG\sphericalangle = 180^\circ$, így a G, H, F pontok valóban egy egyenesbe esnek.

Most belátjuk, hogy a $HCKA$, illetve a $HDKB$ négyszögek húrnégyszögek.

Az $ABCD$ húrnégyszög megváltoztatásával bizonyos szögek megváltozhatnak, de az, hogy a két négyszög húrnégyszög ekkor is analóg módon bizonyítható. (Ilyen eset lehet, ha például a K pont átkerül az AC szakasz B-vel átellenes oldalára.)

Ehhez a $CKA\sphericalangle + AHC\sphericalangle = 180^\circ$, illetve a $DKB\sphericalangle + BHD\sphericalangle = 180^\circ$ feltételeket kell igazolnunk.

A kerületi és középponti szögek tétele miatt:

$$CKA\sphericalangle = 2 \cdot CBA\sphericalangle = 2\beta, \quad \text{valamint} \quad DKB\sphericalangle = 2 \cdot DAB\sphericalangle = 2\alpha.$$

Tehát elegendő belátnunk, hogy:

$$AHC\sphericalangle = 180^\circ - 2\beta \quad \text{és} \quad BHD\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha,$$
$$AHC\sphericalangle = 180^\circ - (FHC\sphericalangle + AHG\sphericalangle), \quad BHD\sphericalangle = 180^\circ - (FHB\sphericalangle + DHG\sphericalangle).$$

Most pedig igazoljuk, hogy:

$$FHB\sphericalangle = DHG\sphericalangle = \alpha, \quad FHC\sphericalangle = AHG\sphericalangle = \beta.$$

$FHB\sphericalangle = FCB\sphericalangle$ az $FHCB$ húrnégyszögben, és

$$FCB\sphericalangle = 180^\circ - BCD\sphericalangle = DAB\sphericalangle = \alpha.$$

Ugyanígy $DHG\sphericalangle = DCG\sphericalangle = 180^\circ - BCD\sphericalangle = DAB\sphericalangle = \alpha$. A másik szögpárnál szükségünk lesz még egy húrnégyszögre, a $BHGA$ négyszögre. Ez a négyszög is húrnégyszög, hiszen

$$BHG\sphericalangle = 180^\circ - BHF\sphericalangle = 180^\circ - BCF\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 180^\circ - DAB\sphericalangle,$$

és így $GAB\sphericalangle + BHG\sphericalangle = 180^\circ$. Tehát $GABH$ húrnégyszög, így:

$$AHG\sphericalangle = ABG\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta.$$

Mivel $FHCB$ húrnégyszög:

$$CHF\sphericalangle = 180^\circ - FBC\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta.$$

Tehát igazoltuk, hogy a $HCKA$ és a $HDKB$ négyszögek húrnégyszögek, így rátérhetünk a bizonyítandó állításra.

Legyen a $HCKA$ négyszög köré írt köre a, $HDKB$-é b, $ABCD$-é pedig k. Végezzünk k alapkörű inverziót[1], mely során a-t és b-t invertáljuk. Mindkét kör képe egyenes lesz, hiszen ezen körök átmennek k középpontján, K-n. Másrészről, mivel A, B, C, D egyaránt k pontjai, az inverzió ezeket helyben hagyja. Tehát a képe egy egyenes, mely átmegy az A és C pontokon – ez éppen az AC egyenes. Hasonlóan b képe a BD egyenes lesz. Ezek metszéspontja E. Az a és b invertálása során kaptunk egy olyan pontot, mely a és b inverzén is rajta van. Az inverzió két különböző ponthoz két különböző pontot rendel. Ez azt jelenti, hogy E az a és b közös pontjának inverze lesz. Az a és b két közös ponttal rendelkezik: H-val és K-val. Közülük K az alapkör középpontja, melynek nincs inverze. Ebből következik, hogy H inverze E, vagyis K, H és E egy egyenesen van.

[1] Az **I. 324.** feladat az inverzió bemutatása volt prezentáció segítségével: http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=I324&l=hu.