Megoldás. Legyen $x = y = 0$:

$$f(0+0) + f(0) \cdot f(0) = 0^2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0,$$
$$f(0)^2 + f(0) = 0,$$
$$f(0) \cdot \big(f(0) + 1\big) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamely tényezője nulla, így $f(0) = 0$ vagy $f(0) = -1$.

Legyen $y = 0$ és x tetszőleges:

$$f(x+0) + f(x) \cdot f(0) = x^2 \cdot 0^2 + 2x \cdot 0,$$
$$f(x) + f(x) \cdot f(0) = f(x) \cdot \big(1 + f(0)\big) = 0.$$

Ha $f(0) = 0$, akkor a szorzat első tényezőjének kell nullának lennie:

$$f(x) = 0;$$

ez viszont nem megoldás például $x = y = 1$-re:

$$f(2) + f(1)^2 = 1^2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1,$$
$$0 \neq 3.$$

Tehát $f(0) = -1$.

Legyen $y = -x$:

$$f(x-x) + f(x) \cdot f(-x) = x^4 - 2x^2,$$
$$f(0) + f(x) \cdot f(-x) = x^4 - 2x^2.$$

Felhasználva, hogy $f(0) = -1$:

$$f(x) \cdot f(-x) = x^4 - 2x^2 + 1,$$
$$f(x) \cdot f(-x) = (x^2 - 1)^2.$$

Legyen itt $x = 1$:

$$f(1)f(-1) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

Ha $f(1) = 0$, akkor legyen $y = 1$ és x tetszőleges:

$$f(x+1) + f(x) \cdot f(1) = x^2 \cdot 1^2 + 2x \cdot 1,$$
$$f(x+1) + f(x) \cdot 0 = x^2 + 2x,$$
$$f(x+1) = x^2 + 2x.$$

Tehát ekkor $f(x) = (x-1)^2 + 2(x-1) = x^2 - 1$.

Ha $f(-1) = 0$, akkor legyen $y = -1$ és x tetszőleges:

$$f(x-1) + f(x) \cdot f(-1) = x^2 \cdot (-1)^2 + 2x \cdot (-1),$$
$$f(x-1) + f(x) \cdot 0 = x^2 - 2x,$$
$$f(x-1) = x^2 - 2x.$$

Tehát ekkor is $f(x) = (x+1)^2 - 2(x+1) = x^2 - 1$.

Ez a megoldás valóban jó:

$$f(x+y) + f(x) \cdot f(y) = (x+y)^2 - 1 + \big(x^2 - 1\big)\big(y^2 - 1\big) =$$
$$= x^2 + 2xy + y^2 - 1 + x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = x^2y^2 + 2xy.$$

Tehát az egyetlen ilyen f függvény az $f(x) = x^2 - 1$.