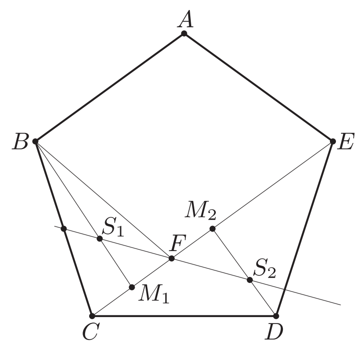
I. megoldás. Mindkét megoldás során fel fogjuk használni a következő, ismert állítást.

Lemma. *Ha egy síkidomot két részre osztunk, a részek területei T_1 és T_2, súlypontjaik pedig S_1 és S_2, akkor a síkidom S súlypontja az S_1S_2 szakasznak az a pontja, melyre $T_1 : T_2 = S_2S : SS_1$ teljesül.*

Tudjuk, hogy a szabályos ötszög átlója párhuzamos az ötszög szemközti oldalával. Mivel a rombusz szemközti oldalai is párhuzamosak s egy adott ponton át egy adott egyenessel csak egy párhuzamos húzható, ezért F megegyezik az EC és BD átlók metszéspontjával.

Legyen a $BCDEF$ ötszöglemez súlypontja S. Ha a lemezt a CD szakasz f felezőmerőlegesével osztjuk két részre, akkor a részek f-re nézve szimmetrikusak, tehát súlypontjaik is azok, amiből a lemma miatt következik, hogy S rajta van f-en.

Osszuk most az ötszöglemezt az EC egyenessel két részre. Az így keletkezett két háromszög, BCF és DEC egyenlőszárú, mert a rombusz oldalainak egyenlősége miatt $BF = AE$, tehát mindkét háromszögnek van két-két olyan oldala, melyek hossza megegyezik a szabályos ötszög oldalának hosszával. Legyen a CF, illetve CE szakaszok felezőpontja M_1, illetve M_2, a BCF és DEC háromszögek súlypontja pedig S_1, illetve S_2 (*1. ábra*). Mivel bármely háromszögben a súlypont harmadolja a súlyvonalakat, ezért ekkor S_1 a BM_1, S_2 pedig a DM_2 szakasz EC egyeneshez közelebbi harmadolópontja. Mivel a két háromszög egyenlő szárú, így $BM_1 \perp CF$ és $DM_2 \perp CE$. Ezért annál a merőleges tengelyes affinitásnál, melynek tengelye az EC egyenes, aránya pedig $1/3$, a B pont képe S_1, a D pont képe S_2, a tengelyen lévő F pont képe pedig önmaga lesz. Ezért az affinitásnál a BFD egyenes képe az S_1FS_2 egyenes lesz, azaz S_1S_2 átmegy F-en.



1. ábra

A lemma miatt a konkáv ötszöglemez súlypontja az S_1S_2 szakaszon is rajta van, tehát nem lehet más, mint f és S_1S_2 metszéspontja. Vagyis a $BCDEF$ konkáv ötszöglemez súlypontja az F pont.

II. megoldás. Jelölje a szabályos ötszög köré írható kör középpontját K, az $ABFE$ rombusz átlóinak metszéspontját pedig M. A szimmetria miatt nyilvánvaló, hogy ezek a pontok egyúttal a szabályos ötszög, illetve a rombusz súlypontjai is. Ha tehát a $BCDEF$ konkáv ötszöglemez súlypontja N, akkor a lemma alapján K az MN szakasznak az a pontja, melyre $MK : KN = T_{BCDEF} : T_{ABFE}$ teljesül.

A területek arányát könnyen meghatározhatjuk. Legyen a szabályos ötszög oldalának hossza 1. Ismert, hogy ekkor átlóinak hossza $\left(\sqrt{5}+1\right)/2$. A szabályos ötszög minden szöge 108°, ezért a köréírható körben az oldalaihoz tartozó kerületi szög $\dfrac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ (*2. ábra*). Egy háromszög területét két oldalából és az azok által bezárt szög szinuszából kiszámolva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
T_{ABCDE} &= T_{AEB} + T_{BEC} + T_{CED} = \\
&= \frac{1}{2}\left(1 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \sin 36^\circ + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \cdot \sin 36^\circ + 1 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \sin 36^\circ\right) = \\
&= \frac{5+3\sqrt{5}}{4} \cdot \sin 36^\circ, \\
T_{ABFE} &= 2 \cdot T_{AEB} = 1 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \sin 36^\circ, \\
T_{BCDEF} &= T_{ABCDE} - T_{ABFE} = \frac{5+3\sqrt{5}}{4} \cdot \sin 36^\circ - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \sin 36^\circ = \\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{4} \cdot \sin 36^\circ.
\end{aligned}$$

Tehát

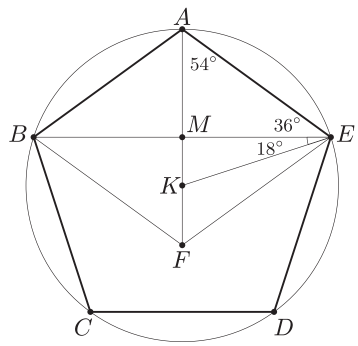
$$T_{BCDEF} : T_{ABFE} = \frac{3+\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Az AKE háromszög egyenlőszárú és szárszöge $360°/5 = 72°$, tehát alapon fekvő szögei $54°$-osak. Vagyis

$$MEK\sphericalangle = AEK\sphericalangle - AEM\sphericalangle = 54° - 36° = 18° = \frac{MEF\sphericalangle}{2},$$

ezért az MEF háromszögben EK szögfelező. Tehát a szögfelezőtétel szerint

$$\frac{MK}{KF} = \frac{ME}{EF} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$



2. ábra

Vagyis az F pontra teljesül, hogy $MK : KF = T_{BCDEF} : T_{ABFE}$, s mivel ilyen tulajdonságú pont csak egy van az MK félegyenesen, ezért a lemmából következik, hogy a $BCDEF$ konkáv ötszöglemez súlypontja F.

Megjegyzés. Általában egy sokszöglemez súlypontja nem esik egybe a sokszög csúcsai által alkotott pontrendszer súlypontjával, ez csak háromszög esetén igaz. Erről részletesebben *Bogdán Zoltánnak* a **B. 3295.** feladathoz kapcsolódó cikkében[1] és a Wikipedian[2] olvashatunk. Azok a megoldók, akik a konkáv ötszöglemez csúcsaiba mutató vektorok számtani közepének segítségével próbálták meghatározni a lemez súlypontját, rossz megoldást adtak.

[1]Bogdán Zoltán: Megjegyzés a B. 3295. feladathoz – alakzatok súlypontjáról, *KöMaL,* **50** (2000. február), 72–75. http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=200059.

[2]https://hu.wikipedia.org/wiki/Tömegközéppont.